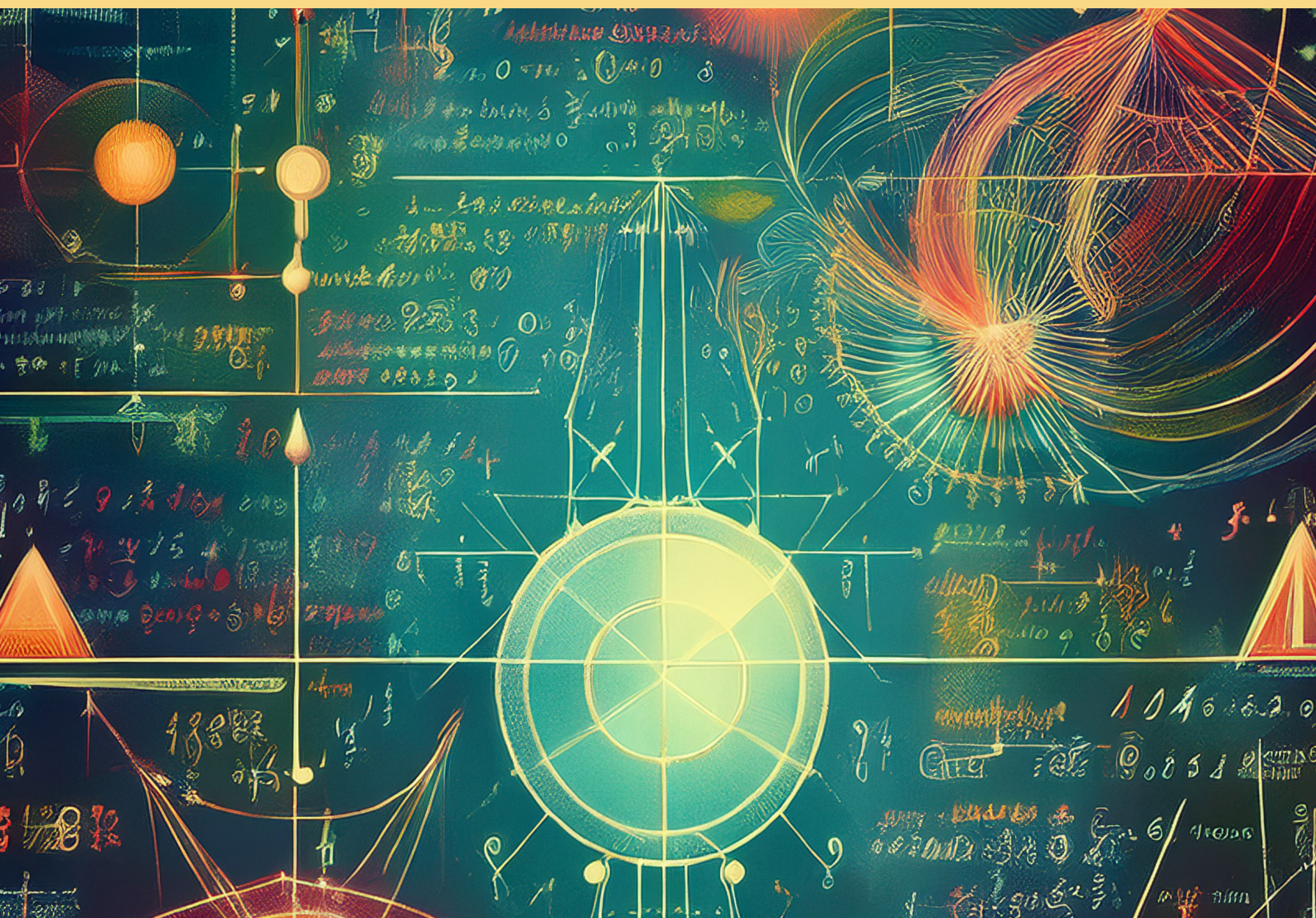
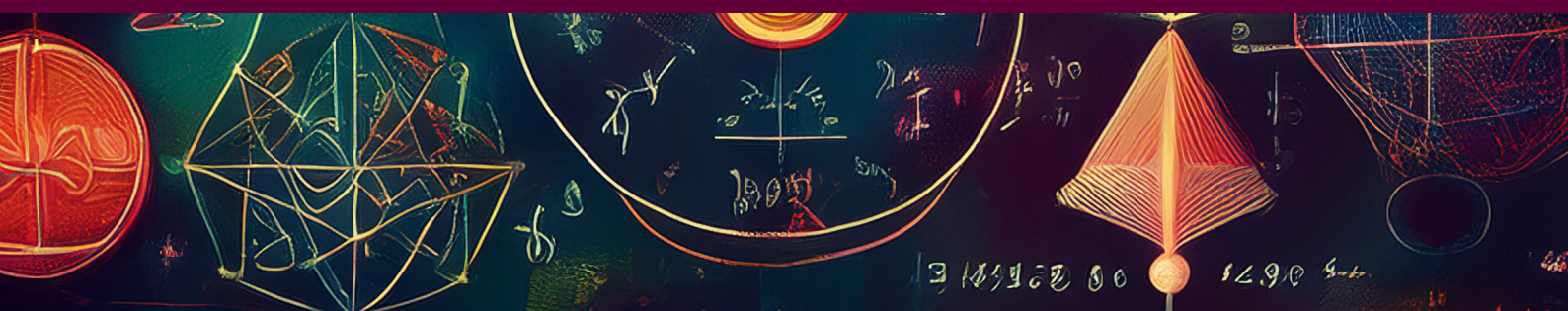




# Matematyka interdyscyplinarnie

## Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli



# **Matematyka interdyscyplinarnie**

**Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli**

# Strona redakcyjna

## **Redakcja:**

Małgorzata Bieńkowska, Sabina Czajkowska-Prokop

## **Zespół Auterek i Autorów:**

Małgorzata Bieńkowska (DODN we Wrocławiu), Agnieszka Czerniawska (POPPPiDM w Polkowicach), Wiesław Gierczyk (PORE w Lwówku Śląskim), Magdalena Grzełińska (PODN w Wołowie), Jerzy Janowicz, Jolanta Lazar (DODN we Wrocławiu), Agnieszka Ogiełło (DODN we Wrocławiu), Henryk Spustek (DODN we Wrocławiu), Ewa Stelczyk (POPPPiDM w Oławie), Maria Subik (PCEiKK w Bolesławcu)

## **Recenzja merytoryczna:**

dr hab. Henryk Spustek (artykuły: 1, 3-10), Marta Młyńczyk (artykuł 2)

## **Korekta językowa:**

Honorata Uchwał-Kalka, Agnieszka Jaworska-Żeglińska

## **Skład:**

 Noemi Nikończuk-Kowalczyk

## **Wydawca:**

Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu, 53-025 Wrocław,  
ul. Trzebnicka 42/44

## **Licencja:**

CC BY-NC-SA 4.0 - Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Na tych samych warunkach 4.0 Polska

ISBN: 978-83-941331-9-1

Egzemplarz bezpłatny. Wydanie 1.

Wrocław, 2026

---

# Spis treści

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Przedmowa                                                                                                                                   | 5   |
| 1. Rozwijanie matematycznych umiejętności analitycznych poprzez integrację nauczania przedmiotów ścisłych i przyrodniczych (Jerzy Janowicz) | 7   |
| 2. Interdyscyplinarne puzzle fizyczne (Henryk Spustek)                                                                                      | 17  |
| 3. O pojęciu odległości – od klasyki do abstrakcji (Wiesław Gierczyk)                                                                       | 47  |
| 4. „Przychodzi budzik do zegara” – scenariusz lekcji (Maria Subik)                                                                          | 55  |
| 5. Matematyka i zdrowie – podejście interdyscyplinarne (Agnieszka Czerniawska)                                                              | 61  |
| 6. Matematyka i ekonomia – kształtowanie myślenia analitycznego w szkole podstawowej (Jolanta Lazar)                                        | 89  |
| 7. Sztuczna inteligencja a zajęcia interdyscyplinarne (Ewa Stelczyk)                                                                        | 101 |
| 8. Projekt interdyscyplinarny „Zielona wieża – mini ogród hydroponiczny” (Magdalena Grzelińska)                                             | 111 |
| 9. „Misja na Marsa” – projekt interdyscyplinarny z elementami STEM (Agnieszka Ogiegło)                                                      | 117 |
| 10. „Sygnał z przyszłości” – scenariusz zajęć interdyscyplinarnych (Małgorzata Bieńkowska)                                                  | 125 |
| Bibliografia                                                                                                                                | 147 |



# Przedmowa

Szanowni Państwo,

oddajemy w Państwa ręce drugą publikację metodyczną z zakresu matematyki, tym razem poświęconą interdyscyplinarnemu podejściu do nauczania i uczenia się tego przedmiotu w szkole podstawowej. Powstała ona z potrzeby poszukiwania skutecznych, atrakcyjnych i nowoczesnych rozwiązań dydaktycznych, które pomagają uczniom lepiej rozumieć matematykę oraz dostrzegać jej obecność w różnych obszarach wiedzy i codziennego życia.

Współczesna edukacja stawia przed nauczycielami i uczniami wyzwania wykraczające poza tradycyjne granice przedmiotów szkolnych. Dynamiczny rozwój nauki, technologii oraz zmieniające się potrzeby społeczne sprawiają, że kluczowe staje się kształtowanie umiejętności analitycznego myślenia, dostrzegania zależności i twórczego rozwiązywania problemów. Odpowiedzią na te potrzeby jest podejście interdyscyplinarne, w którym matematyka jest nie tylko narzędziem obliczeń, lecz także uniwersalnym językiem opisu świata, pozwalającym łączyć wiedzę z różnych dziedzin i dostrzegać jej praktyczne zastosowania w codziennym życiu.

Wspólną publikację pt. *Matematyka interdyscyplinarnie. Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli*, przygotowaną w ramach Programu wsparcia nauczania matematyki w dolnośląskich szkołach podstawowych, opracował zespół doradców metodycznych i nauczycieli-konsultantów matematyki, powołany przez Dolnośląską Kurator Oświaty, Panią Ewę Skrzywanek. Autorzy publikacji reprezentują różne dolnośląskie placówki doskonalenia nauczycieli. Ich doświadczenia, wiedza i różnorodne perspektywy tworzą spójną i wartościową całość, dostarczając inspiracji i praktycznych rozwiązań dla nauczycieli. Rolę instytucji integrującej te działania oraz wydawcy pełni Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu, który od lat wspiera rozwój kompetencji nauczycieli oraz inicjuje współpracę środowisk edukacyjnych w regionie. Zespół wydawniczy DODN dołożył wszelkich starań przy opracowaniu niniejszego materiału, aby zapewnić wsparcie redakcyjne i merytoryczne oraz zadbać o jego jakość.

Nauczanie interdyscyplinarne sprzyja budowaniu spójnego obrazu świata, umożliwia uczniom łączenie treści z różnych przedmiotów oraz rozwija umiejętności analityczne, logiczne i problemowe. Jesteśmy przekonani, że dzięki osadzaniu zagadnień matematycznych w kontekście przyrodniczym, technologicznym, zdrowotnym czy społecznym, uczniowie lepiej rozumieją sens uczenia się matematyki i chętniej podejmują intelektualne wyzwania. Dla nauczyciela jest to z kolei szansa na wzbogacenie warsztatu pracy, współpracę międzyprzedmiotową oraz realizację ciekawych projektów edukacyjnych.

Publikacja zawiera dziesięć artykułów prezentujących różnorodne formy interdyscyplinarnego nauczania matematyki – od rozważań teoretycznych, przez propozycje integracji z fizyką, przyrodą, ekonomią i zdrowiem, po gotowe scenariusze zajęć oraz projekty edukacyjne z elementami STEM i sztucznej inteligencji. Mamy nadzieję, że nasza publikacja Państwa zainspiruje i zachęci do podejmowania interdyscyplinarnych działań w codziennej praktyce szkolnej.

dr Katarzyna Pawlak-Weiss  
Dyrektor

Dolnośląskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu

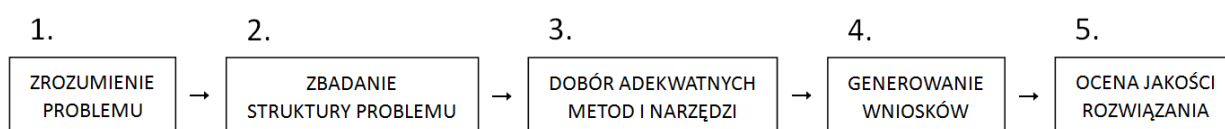


## Rozwijanie matematycznych umiejętności analitycznych poprzez integrację nauczania przedmiotów ścisłych i przyrodniczych

Organizacja nauczania w placówkach oświatowych ukształtowała przekonanie, że wiedza jest „poszufladkowana” – oddzielnie mówi się o fizyce, oddzielnie o matematyce czy biologii. Tymczasem wystarczy spojrzeć za okno, aby zobaczyć, że bez łącznego wykorzystania wiedzy z różnych dyscyplin nie można wyjaśnić zwykłych, codziennych obserwacji: wschodu Słońca, opadów śniegu czy tego, że Sky Tower we Wrocławiu stoi i się nie przewróci. Oczywiście ogląd z różnych perspektyw ma swoje walory – stwarza możliwość bardziej wnikliwego poznania określonych aspektów, ale dopiero logiczne powiązania informacji z różnych obszarów pozwalają pełniej zrozumieć obserwowane fakty, zjawiska i prawidłowości. Korzyść poznawcza jest tu niezaprzeczalna, choć nie wynika ona jedynie ze zwykłego zestawienia różnych obrazów, lecz z dostrzeżenia relacji między nimi. Dopiero wtedy, dzięki synergii, ogląd jest pełniejszy i wzbogacony o nowe elementy. Do tego jednak potrzebny jest jeszcze jeden, kluczowy, można powiedzieć, czynnik, a mianowicie sprawne posługiwanie się myśleniem analitycznym.

### Analityczne myślenie w matematyce i naukach przyrodniczych

Czym jest ta tak istotna kompetencja poznawcza? Zdefiniować ją można poprzez określenie schematu kolejnych czynności, które ją wypełniają (patrz: rys. 1).



Rys. 1. Etapy analitycznego myślenia w matematyce i naukach przyrodniczych. Źródło: opracowanie własne.

1. Zrozumienie problemu to precyzyjne ustalenie, jaki cel należy osiągnąć, jakie uwarunkowania towarzyszą rozważanej kwestii oraz jaki wstępnie zasób informacji jest do dyspozycji.
2. Problemy posiadają zwykle mniej lub bardziej złożoną budowę wynikającą z powiązań logicznych, przyczynowo-skutkowych lub czynników kontekstowych. Ustalenie struktury jest istotne, gdyż pozwala dostrzec potencjalnie użyteczne relacje ułatwiające rozwiązanie analizowanego zagadnienia.
3. Kolejnym etapem myślenia analitycznego jest przegląd przystępnych metod i narzędzi, oraz wybór tych z nich, które najskuteczniej i najszybciej doprowadzą do pożądanego rezultatu.
4. Użycie wybranych metod jest kolejnym krokiem ku rozwiązaniu. Poprzez wnioskowanie, kojarzenie faktów, buduje się ścieżka łącząca zestaw danych określających problem z jego rozstrzygnięciem.

5. Ostatnim krokiem wieńczącym proces myślenia analitycznego powinna być refleksja – czy problem został w pełni rozwiązany, czy podczas rozwiązywania nie wystąpiły sytuacje ograniczające jego ogólność lub zakres użyteczności, ewentualnie czy znając już końcowy efekt, nie można uprościć lub poprawić przeprowadzonej analizy.

Myślenie analityczne w matematyce ma swoją specyfikę. Jest ścisłe, jednoznaczne, rygorystycznie przestrzega zasad logiki i prowadzone jest bardzo systematycznie. Nieco inaczej postrzegać można ten typ rozumowania w innych przedmiotach ścisłych lub przyrodniczych. Tu podmiotem analizy są obiekty fizyczne, realne zjawiska czy dane empiryczne. W odróżnieniu od myślenia matematycznego, które ma charakter dedukcyjny, tu powszechnym jest rozumowanie typu indukcyjnego prowadzące od obserwacji szczególnych do uogólnień. Z tym wiąże się kluczowa rola eksperymentów, pomiarów, obserwacji, które w matematycznym rozumowaniu analitycznym nie są wykorzystywane. Inaczej jest również sformułowany cel analiz. W matematyce jest to dowód pewnego faktu lub obliczenie dokładnej wartości pewnej wielkości, a w innych naukach ścisłych i przyrodniczych rozumowanie analityczne nakierowane jest na możliwie najpełniejszy opis zjawisk i ewentualne przewidywanie następstw. Stąd wynika również różnica w prezentowaniu rozumowania i jego efektów – od ścisłego, formalnego w matematyce, do opisowego, kontekstowego, a nawet probabilistycznego w naukach przyrodniczych.

W nauczaniu, które powinno mieć holistyczny charakter, niezbędne są różne ujęcia procesów myślowych, co gwarantuje pełniejszy, wieloaspektowy ogląd zjawisk przyrodniczych z jednej strony, a struktur logicznych – z drugiej. Możliwość realizacji takiego rozumienia edukacji daje integracja międzyprzedmiotowa.

## **Integracja w nauczaniu matematyki i przedmiotów przyrodniczych**

Ideę integracji w nauczaniu można określić jako takie postępowanie, które łączy wiedzę i umiejętności z różnych przedmiotów po to, aby dać pełniejszy obraz badanych zjawisk i relacji dzięki efektowi synergii oraz otwarciu różnych perspektyw postrzegania analizowanego problemu. Korzyści z takiego ujęcia, z punktu widzenia ucznia, są niezaprzeczalne. Daje mu ono możliwość łatwiejszego zrozumienia trudnych pojęć, gdyż pokazuje różne powiązania z dotychczasową wiedzą uczniowską i doświadczeniami ze świata rzeczywistego. Różnorodność ujęć wpływa także na rozwój myślenia analitycznego – dostrzeganie związków, rzutkość, pomysłowość i kreatywność – stwarzając naturalne podłoże do transferu wiedzy między różnymi dziedzinami. Wszystko to działa także pozytywnie na motywację do uczenia się i samodzielność poznawczą.

W jaki sposób ta koncepcja może być realizowana w praktyce szkolnej? Na lekcjach matematyki często sięga się do kontekstów realistycznych, aby:

- nadać typowym algorytmicznym zadaniom bardziej atrakcyjną postać;
- pokazać powiązania wiedzy matematycznej ze światem realnym;
- użyć umiejętności typowo matematycznych do analizy problemów spoza tej dyscypliny.

Najpełniejsza integracja występuje w ostatnim z wymienionych sposobów jej ujęcia. Jest on jednak najtrudniejszy – zwłaszcza dla osób przygotowujących obudowę edukacyjną (podręczniki, testy diagnostyczne).

Dla integracji nauczania ważne jest także korzystanie z wiedzy matematycznej na innych przedmiotach ścisłych i przyrodniczych. Najbardziej typowymi przykładami są:

- fizyka – przekształcanie wzorów, obliczenia, szacowanie, zależności funkcyjne, wykresy;

- chemia – zapisywanie równań reakcji, obliczanie stężeń, diagramy, wykresy;
- geografia – skala, czytanie i analizowanie danych statystycznych;
- biologia – obliczanie średnich z pomiarów, modelowanie przebiegu zjawisk.

Oba te kierunki integracji, zmierzające ku korzystaniu z metod matematycznych, prowadzą do kształcenia większej otwartości, pokazywania uniwersalności i użyteczności zdobywanych kompetencji oraz pozwalają nakierować aktywność poznawczą uczniów na kompleksowe rozwiązywanie problemów bez ograniczeń (nie zawsze dostrzeganych), wynikających z konkretnego przedmiotu.

## Integracja międzyprzedmiotowa w podstawach programowych

Tworzenie powiązań międzyprzedmiotowych jest wyraźnie postulowane w podstawie programowej – zasadniczym dokumencie kreującym cele i zakres działań dydaktycznych. Podstawa programowa dla szkoły podstawowej obowiązująca do roku szkolnego 2025/2026<sup>1</sup> zakłada sprawne wykorzystywanie narzędzi matematyki w życiu codziennym. Realizację tego postulatu znaleźć można nie tylko w akapitach dotyczących matematyki, ale także w wytycznych obejmujących inne przedmioty ściśle i przyrodnicze. Podstawowe aktywności z tego zakresu skupiają się wokół:

- zbierania, opracowywania i prezentowania wyników doświadczeń, obserwacji i pomiarów;
- analizowania zebranego materiału i prób uogólnień;
- tworzenia prostych modeli matematycznych opisujących zaobserwowane zależności (np. proporcjonalność prosta, wykresy, równania);
- korzystania z algorytmów matematycznych jako narzędzi do sprawnego analizy opisywanych zjawisk.

W podstawie programowej z matematyki także można wskazać wiele punktów, które mają bezpośrednie zastosowanie w innych przedmiotach. Dla przykładu można wymienić:

- odczytywanie i interpretowanie danych, przedstawianie ich w sposób graficzny, używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników;
- dobieranie modelu matematycznego lub budowanie takiej reprezentacji w kontekstach praktycznych;
- wśród celów szczegółowych: zaokrąglanie liczb, zamianę jednostek, obliczenia procentowe, zegarowe, kalendarzowe, zależności między prędkością, drogą i czasem w ruchu jednostajnym, przedstawianie, odczytywanie i interpretowanie danych, przekształcanie wzorów fizycznych.

W toczącej się obecnie dyskusji i w trwających pracach nad nową podstawą programową często pojawiają się kompetencje związane z myśleniem analitycznym – również w kontekście interdyscyplinarnym. Jednym z postulowanych elementów modelu absolwenta szkoły podstawowej w zakresie umiejętności rozumowania matematycznego, proponowanym przez Instytut Badań Edukacyjnych<sup>2</sup>, jest znajomość i rozumienie procedur i idei matematycznych oraz umiejętność ich zastosowania do rozwiązywania realnych problemów. W materiale opracowanym przez IBE podkreśla się, że rozumowanie matematyczne jest kompetencją wykorzystywaną przez uczniów i uczennice nie tylko w trakcie lekcji matematyki, ale także do nauki innych przedmiotów szkolnych oraz aktywności pozaszkolnej. W ujęciu bardziej szczegółowym dotyczy to:

- rozumienia przydatności matematyki;

<sup>1</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz. U. z 2024 r. poz. 996)

<sup>2</sup> Profil absolwenta i absolwentki. Droga do zmian w edukacji. *Etap I: przedszkola i szkoły podstawowe*, Instytut Badań Edukacyjnych: Warszawa 2024.

- użycia procedur, idei i narzędzi matematycznych;
- rozwiązywania problemów i nadawania sensu światu za pomocą matematyki;
- rozpoznawania trendów, relacji, wzorców matematycznych;
- analizowania informacji, interpretowania ich, oceniania ich wiarygodności i wnioskowania – w tym również z wielu perspektyw, przy wykorzystaniu różnych rodzajów wiedzy oraz zasad logicznych stanowiących podstawę analizowania i krytycyzmu poznawczego.

Założenia profilu absolwenta i absolwentki szkoły podstawowej mocno wiążą umiejętności myślenia analitycznego z rozwiązywaniem problemów, podkreślając rolę tego typu myślenia w rozpoznawaniu sytuacji problemowej, jej kontekstu, poziomu złożoności czy projektowaniu czynności prowadzących do rozwiązania.

Interesującą kwestią jest ocena stanu obecnego. Wobec wielości programów nauczania i napisanych na ich podstawie podręczników, wymagałoby to oddzielnego, pokaźnego opracowania. Ograniczając się więc jedynie do ogólnej konstatacji można stwierdzić, że eksponowanie powiązań między dyscyplinami naukowymi jest zabiegiem częstym, przy czym przeważają zapożyczenia kontekstowe. Więcej zachęt do głębszego analizowania problemów przyrodniczych za pomocą aparatu matematycznego znajduje się w tych publikacjach, które proponują uczniowskie prace badawcze, zachęcają do samodzielnego stawiania pytań oraz promują kreatywność poznawczą. Ocena efektywności tych działań wymaga indywidualnego podejścia. Nieco więcej światła na skuteczność kształtowania umiejętności analitycznych i wykorzystywanie korelacji międzyprzedmiotowych mogą rzucić diagnozy przeprowadzane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

## Myślenie analityczne i interakcja międzyprzedmiotowa na egzaminie ósmoklasisty

---

Diagnozy edukacyjne mają swoją specyfikę i wynikające z niej ograniczenia. Formuła zadań egzaminacyjnych powinna być taka, aby ich rozwiązania były łatwe do sprawdzania, a zdający mógł je rozwiązać praktycznie bez żadnych dodatkowych przyrządów (ewentualnie korzystając z linijki). Ponadto zadania powinny diagnozować wiedzę z głównego przedmiotu, a umiejętności z innych dyscyplin (lub ich brak) nie mogą warunkować skuteczności rozwiązania. Czy zatem na egzaminach nie pojawiają się zadania interdyscyplinarne? Owszem, pojawiają się. Autorzy takich zadań zamieszczają zwykle istotne dane w ich tekstach albo bazują na wiedzy, co prawda z innych przedmiotów, ale takiej, która weszła do wiedzy powszechnej.

Ograniczenia związane ze sprawdzaniem rozwiązań sprawiają, że trudniej jest diagnozować umiejętność myślenia analitycznego, które ze swej natury jest procesem złożonym. Zadania zamknięte nie są dobrym narzędziem, gdyż ocenić można jedynie końcowy wynik, i to jeszcze bez pewności, czy został on otrzymany w wyniku rozumowania, czy wskazano go przypadkowo. Optymalnym rozwiązaniem jest zamieszczanie w arkuszach egzaminacyjnych zadań otwartych, jednak na egzaminie ósmoklasisty stanowią one tylko część całego zestawu. Jak to wygląda w praktyce? Oto kilka przykładów wybranych z materiałów CKE oraz z publikacji przygotowujących do tego sprawdzianu.

**Przykład 1.<sup>3</sup>**

Zależność drogi od czasu i przyspieszenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym (gdy prędkość początkowa jest równa 0) opisuje wzór  $s = \frac{at^2}{2}$ , gdzie  $s$  – droga,  $t$  – czas,  $a$  – przyspieszenie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Przyspieszenie  $a$  poprawnie wyznaczone z powyższego wzoru można opisać równaniem:**

A.  $a = \frac{st^2}{2}$

B.  $a = \frac{t^2}{2s}$

C.  $a = \frac{2s}{t^2}$

D.  $a = 2st^2$

Zadanie łączy wiedzę fizyczną i matematyczną, ale tak naprawdę diagnozuje jedynie umiejętności rachunkowe.

**Przykład 2.<sup>4</sup>**

Kasia w ciągu 4 godzin przejechała na rowerze trasę o długości 60 km. Gdyby czas przejazdu Kasi był o 35% dłuższy, to czy średnia jej prędkość na całej trasie byłaby o 35% mniejsza? Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród możliwych odpowiedzi: 1, 2, 3.

|   |      |          |    |                                                                                          |
|---|------|----------|----|------------------------------------------------------------------------------------------|
| T | Tak, | ponieważ | 1. | długość trasy w obu przypadkach jest taka sama.                                          |
| N | Nie, |          | 2. | $75\%$ z $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ jest różne od $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . |
|   |      |          | 3. | 4 h to o 20% mniej niż 5 h.                                                              |

Tu matematyka jest połączona z fizyką i również jest to integracja głównie na poziomie treści, ale struktura zadania sprawia, że na podstawie wskazań ucznia można dostrzec elementy jego myślenia analitycznego, takie jak stawianie hipotezy czy dobór argumentów.

**Przykład 3.<sup>5</sup>**

Poniżej zamieszczono fragment etykiety pewnego opakowania śmietany.

| Śmietana                           |        |
|------------------------------------|--------|
| Wartość odżywcza w 100 g produktu: |        |
| tłuszcz                            | 18 g   |
| węglowodany                        | 4 g    |
| białko                             | 3 g    |
| sól                                | 0,15 g |

**Uzupełnij zdania. Wybierz poprawną odpowiedź spośród odpowiedzi oznaczonych literami A i B oraz C i D.**

W opakowaniu zawierającym 200 g tej śmietany jest   dag białka.

A. 0,6

B. 0,06

Masa tłuszczu w dowolnej porcji tej śmietany jest   razy większa od masy soli.

C. 12

D. 120

Widoczne tutaj połączenie biologii z matematyką wykorzystuje też wiedzę przyrodniczą jako środowisko do czynności typowo matematycznych, ale nie ogranicza się ono jedynie do algorytmów arytmetycznych, lecz zawiera elementy rozumowania – porównywanie oraz dostrzeganie porcji.

<sup>3</sup> Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Termin dodatkowy 2020 r., Centralna Komisja Egzaminacyjna, s. 6.

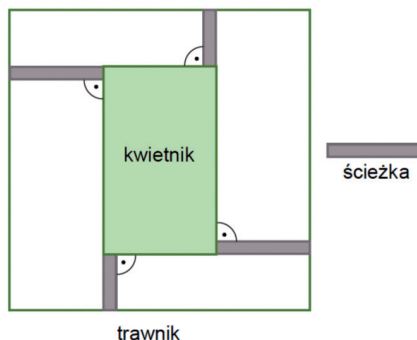
<sup>4</sup> Grochowska M., Radziewicz J., (2024), *Matematyka. Przygotowanie do egzaminu ósmoklasisty*. Repetytorium, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, s. 46.

<sup>5</sup> Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Test diagnostyczny, Centralna Komisja Egzaminacyjna, grudzień 2024, s. 4.

#### Przykład 4.<sup>6</sup>

Na trawniku w kształcie kwadratu o boku długości 9 metrów wytyczono kwietnik w kształcie prostokąta tak, że jego boki są równoległe do boków trawnika. Do kwietnika prowadzą cztery ścieżki. Dwie krótsze ścieżki mają po 1,5 m długości każda, a dwie dłuższe mają po 2,5 m długości każda (patrz: rys. 2).

**Oblicz pole powierzchni wytyczonego kwietnika. Zapisz obliczenia.**



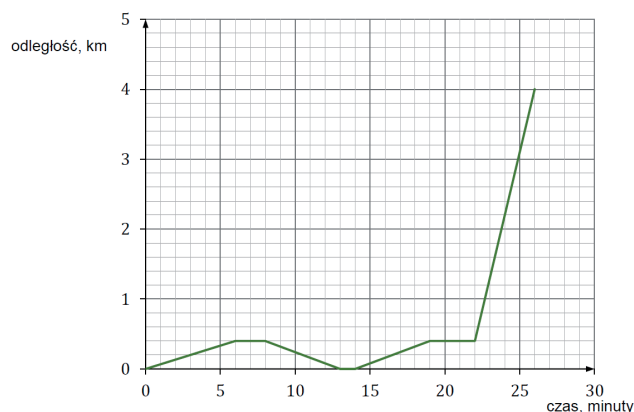
Rys. 2. Ilustracja do przykładu 4.

Jest to zadanie otwarte, którego rozwiązanie wymaga bardziej złożonych czynności – analizę rysunku, odczytanie z niego relacji między obiektami, wykorzystanie uzyskanych wniosków do zaplanowania i przeprowadzenia obliczeń. Jest to – na poziomie ósmej klasy szkoły podstawowej – kilkietapowy proces myślenia o charakterze analitycznym.

#### Przykład 5.<sup>7</sup>

Mateusz mieszka 4 km od szkoły. Część drogi pokonuje pieszo, idąc do przystanku autobusowego. Tam czeka na autobus, a następnie wsiada do niego i jedzie do szkoły. Pewnego dnia, gdy był już na przystanku, uświadomił sobie, że zapomniał wziąć zeszytu, więc wrócił po niego do domu. Wykres na rysunku 3 przedstawia, jak w tym dniu zmieniała się odległość Mateusza od domu w zależności od czasu.

**Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**



Rys. 3. Droga przebyta do szkoły przez Mateusza w zależności od czasu.

|                                                                                          |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| Dom Mateusza znajduje się w odległości 400 m od przystanku autobusowego.                 | P | F |
| Autobus drogę między przystankami pokonał z prędkością $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . | P | F |

<sup>5</sup> Egzamin ósmoklasisty. *Matematyka*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, czerwiec 2024, s. 16.

<sup>6</sup> Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2024/2025, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2025, s. 22-23.

Rozwiązanie tego zadania, łączącego fizykę i matematykę, wymaga od ucznia analizy zależności przedstawionej na wykresie, a następnie umiejętnego odczytania potrzebnych danych i przeprowadzenia niezbędnych obliczeń. Konstrukcja zadania w interesujący sposób pobudza ucznia do rozumowania analitycznego.

### Przykład 6.<sup>8</sup>

Pan Andrzej wybrał się na krótki spacer. Odcinek drogi, stanowiący  $\frac{1}{6}$  całej trasy, przeszedł z prędkością  $4 \frac{km}{h}$ , drugą część trasy, stanowiącą  $\frac{1}{2}$  całości, przeszedł z prędkością  $3 \frac{km}{h}$ . Pozostałe 400 m pokonał w tempie  $2 \frac{km}{h}$ . Uzasadnij, że spacer pana Andrzeja trwał mniej niż pół godziny.

W tym zadaniu także występuje integracja treści fizycznych i matematycznych. Uczeń rozwiązujący je przechodzi de facto całą procedurę myślenia analitycznego – od zrozumienia struktury zależności w nim przedstawionych, poprzez dobór metody do generowania wniosków pozwalających w pełni uzasadnić sformułowaną w zadaniu tezę.

### Przykład 7.<sup>9</sup>

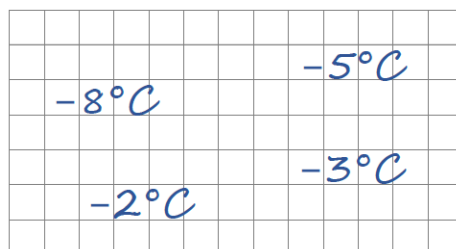
Na mapie sporządzonej w skali 1 : 50000 odległość od domu Uli do dworca kolejowego jest równa 2,8 cm, a na mapie w skali 1 : 20000 odległość od domu Uli do dworca autobusowego jest równa 7,5 cm. Czy Ula ma dalej z domu do dworca kolejowego czy do dworca autobusowego?

Treść powyższego zadania łączy w sobie elementy matematyki i geografii. Pytanie w nim postawione jest otwarte, nie sugeruje, która odpowiedź jest prawidłowa. To rolą ucznia jest tak przeprowadzić rozumowanie, aby uzasadnić jedną z możliwych opcji.

### Przykład 8.<sup>10</sup>

Adam zapisał, w przypadkowej kolejności, podane w programie radiowym wartości temperatury odnotowane pewnego zimowego dnia o godzinie 20:30 w Zakopanem, w Wiśle, w Karpaczu i w Szklarskiej Porębie (patrz: rys. 4). Temperatura w Karpaczu była o 6 °C wyższa niż w Szklarskiej Porębie, a w Wiśle była niższa niż w Zakopanem.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**



Rys. 4. Wartości temperatury zapisane przez Adama.

Temperaturę  $-5^{\circ}\text{C}$  zanotowano w:

A. Szklarskiej Porębie.

B. Zakopanem.

C. Karpaczu.

D. Wiśle.

<sup>7</sup> Grochowska M., Radziejewicz J., op. cit., s. 38.

<sup>8</sup> Janowicz J. (2021), *Teraz egzamin ósmoklasisty. Repetytorium z matematyki dla szkoły podstawowej*, Warszawa: Nowa Era, s. 37.

<sup>9</sup> Egzamin ósmoklasisty. Matematyka, Centralna Komisja Egzaminacyjna, czerwiec 2024, s. 4.

Jest to ciekawy przykład zadania zamkniętego, którego rozwiązanie wymaga przeanalizowania zależności, być może stworzenia modelu sytuacji w nim przedstawionej (oś liczbowa) i następnie przeprowadzenia logicznego wnioskowania. Istotną kompetencją tutaj badaną nie jest sprawność rachunkowa, ale właśnie myślenie o charakterze analitycznym.

#### Przykład 9.<sup>11</sup>

W zalewie stosowanej do kiszenia ogórków sól stanowi 3% masy. Do ilu kilogramów wody należy wsypać 1,5 kg soli celem sporządzenia takiej zalewy? Zapisz obliczenia.

#### Przykład 10.<sup>12</sup>

Gęstość substancji oblicza się, dzieląc jej masę przez objętość. Ciecz o masie 550 g ma objętość  $500 \text{ cm}^3$ . Ile  $\text{cm}^3$  cieczy o gęstości  $0,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  należy do niej dolać, aby otrzymać mieszaninę o gęstości  $1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ? Zapisz obliczenia.

Oba zadania (przykład 9 i 10) są interdyscyplinarne (matematyka, chemia, fizyka), przy czym matematyka w ich rozwiązaniach nie ogranicza się jedynie do narzędzi rachunkowych, ale towarzyszy całej procedurze analizowania, projektowania rozwiązania, szukania najprostszych metod, czyli jest osią prowadzonego myślenia analitycznego.

Na poziomie szkół ponadpodstawowych łatwiej jest projektować problemy interdyscyplinarne, gdyż do dyspozycji jest bardziej rozbudowany aparat matematyczny – do wykorzystania są funkcje, równania oraz bardziej zaawansowane elementy statystyki. Także formułowane zadania mogą być bardziej złożone, dzięki czemu myślenie analityczne może przebiegać w pełniejszym zakresie.

## Rozwijanie myślenia analitycznego poprzez integrację matematyki i nauk przyrodniczych – kierunki i przykłady działań

Uniwersalność pojęć i obiektów matematycznych umożliwia interdyscyplinarne łączenie ich z innymi przedmiotami przyrodniczymi i ścisłymi. Wiele zjawisk realnych można opisać językiem funkcji i przedstawić modele takich zależności w postaci wzorów, równań lub wykresów. Często stosowany jest również aparat statystyczny do analizowania danych, odkrywania prawidłowości, trendów, prognozowania przebiegu zjawisk. Wzajemne przenikanie się wiedzy i umiejętności z różnych dyscyplin naukowych to także większa możliwość analizowania problemów dzięki kompleksowemu oglądowi i bogatszemu zasobowi metod.

Przykładowe działania edukacyjne to:

- użycie metod statystycznych w biologii do badania określonej populacji czy ekosystemu;
- lekcje ekonomii praktycznej – podejmowanie decyzji finansowych, funkcjonowanie systemu bankowego czy podatkowego;
- odkrywanie zależności fizycznych (proporcjonalność prosta lub odwrotna, zmienność wykładnicza), geometria rachunku wektorowego;
- tworzenie arytmetycznych modeli przebiegu reakcji chemicznych czy rozwiązywanie praktycznych problemów związanych ze stężeniami;

<sup>11</sup> Grochowska M., Radziejewicz J., op. cit., s. 47.

<sup>12</sup> Ibidem s. 100.

- zajęcia praktyczne w terenie związane z mapą, skalą i obliczeniami;
- przeprowadzanie doświadczeń fizycznych lub chemicznych, np. obserwacja temperatury danego ciała w czasie stygnięcia czy badanie rozpuszczalności określonej substancji w zależności od temperatury rozpuszczalnika;
- analizy wartości odżywczych określonych produktów spożywczych;
- stawianie otwartych pytań i problemów odnoszących się do zjawisk obserwowanych w otoczeniu, np. dlaczego jazda rowerem pod górę wymaga więcej wysiłku niż jazda w dół, jak obliczyć wysokość latarni, wykorzystując długość jej cienia,
- gry edukacyjne z kontekstem przyrodniczym, które wymagają analitycznej oceny sytuacji i opracowania najlepszej strategii.

Oczywistym jest, że skuteczność kształcenia w kierunku holistycznego pojmowania wiedzy i analitycznego jej wykorzystania zależy od otwartości i kreatywności nauczycieli. Niezbędna wydaje się tutaj współpraca osób uczących różnych przedmiotów, ale mających przekonanie o zysku edukacyjnym z takiego ujęcia metodycznego. Owocować to może:

- tworzeniem wspólnych scenariuszy lekcji;
- prowadzeniem interdyscyplinarnych projektów edukacyjnych;
- bogatszym doбором zadań, problemów, a także pomocy dydaktycznych;
- rozwojem zawodowym nauczycieli, nabywaniem nowych kompetencji metodycznych.

Takie rozumienie nauczania jest oczywiście wyjściem poza utarte schematy i nie zawsze jest łatwe w realizacji. Barrierami są tutaj:

- ograniczenia organizacyjno-prawne wynikające z podziału nauczania na przedmioty, obowiązku realizowania podstawy programowej, ilości czasu przeznaczonego na zajęcia z uczniami czy systemu oceniania;
- trudności w synchronizacji terminów realizacji określonych tematów;
- ograniczona oferta opracowań metodycznych wspierających interdyscyplinarność i prowadzone na jej bazie myślenie analityczne;
- opór części nauczycieli przed odejściem od tradycyjnych metod i ścisłego podziału na przedmioty;
- obawy i niska motywacja części uczniów związana z niestereotypowymi działaniami;
- nadawanie zbyt wysokiego priorytetu wynikom egzaminów, kosztem pełniejszego rozwoju intelektualnego uczniów.

## Podsumowanie – rekomendacje

Integracja matematyki i przedmiotów ścisłych oraz przyrodniczych poprzez uogólnione procesy myślenia analitycznego nie jest łatwym ani krótkotrwałym procesem. Jest jednak na tyle ważnym dla rozwoju młodego pokolenia, że warto i należy podejmować konkretne działania w tym kierunku. Inicjatorami i realizatorami tychże powinni być:

- nauczyciele – poprzez współpracę międzyprzedmiotową, korzystanie z różnych źródeł wiedzy, otwartość na nowe metody nauczania;
- szkoły – poprzez organizację nauczania sprzyjającą interakcjom międzyprzedmiotowym, wspieranie rozwoju zawodowego nauczycieli;
- urzędy oraz instytucje oświatowe i współpracujące z systemem edukacyjnym – poprzez uwzględ-

nianie kompetencji analitycznych w ogólnych umiejętnościach formułowanych w podstawie programowej oraz treści międzyprzedmiotowych zawartych w celach szczegółowych, przygotowywanie materiałów dydaktycznych i prowadzenie szkoleń.

Taka wizja nauczania ukierunkowana jest na otwieranie przed uczniami nowych możliwości poznawczych, pozwalających im lepiej rozumieć otaczającą rzeczywistość, dostarcza im efektywnych narzędzi prowadzenia swojego rozwoju intelektualnego w kierunku, który umożliwi im łatwiejsze i pełniejsze funkcjonowanie w zmieniającym się świecie – obecnym i przyszłym.

## Interdyscyplinarne puzzle fizyczne

*Nie ma granic między dyscyplinami matematycznymi,  
nie ma granic między matematyką a innymi naukami  
i nie ma granic między nauką a otaczającym nas światem.*

Fragment przemówienia promotora podczas nadania tytułu  
doktora honoris causa Uniwersytetu Wrocławskiego  
Hugonowi Steinhausowi w roku 1965

### Wprowadzenie

*Gdyby matematyka nie istniała, to świat cofnąłby się tylko o tydzień* – powiedział fizyk Richard Feynman do matematyka Marka Kaca, który wygłaszał swój referat w Kalifornijskim Instytucie Technologii. Była to uszczypliwa uwaga fizyka w stronę matematyka, dotycząca przesadnej według Feynmana dbałości o ścisłość wywodów matematycznych. Mark Kac bez namysłu odpowiedział: *Ależ tak, właśnie o ten tydzień, w którym Bóg stworzył świat!*

Istnieje niezaprzeczalny związek łączący matematykę z fizyką. Te dwie dyscypliny naukowe wzajemnie się wspierają. Matematyka dostarcza aparatu obliczeniowego i eleganckich modeli, bez których ilościowe wyjaśnienie praw fizyki byłoby niemożliwe. Z kolei fizyka poprzez implementację metod matematycznych sprawia, że przestają być one jedynie abstrakcją. Dzieje się tak między innymi z tego powodu, że jeden i ten sam problem jest inaczej postrzegany przez matematyka i fizyka. To właśnie ta różnorodność spojrzeń na rzeczywistość stała się źródłem postępu w naukach ścisłych. W niniejszym artykule zostanie to pokazane na kilku przykładach praktycznych.

Na związek fizyki z matematyką i innymi dyscyplinami naukowymi wskazywano od dawna. Zatem interdyscyplinarność w dydaktyce nie jest niczym nowym, powinna być raczej traktowana jako rozwinięcie znacznie wcześniejszych pomysłów. Związki pomiędzy poszczególnymi przedmiotami nauczania nazwane zostały w dydaktyce korelacją. Korelacja ta, a szczególnie jej czynna odmiana nazwana przez Sergiusza Hessena korelacją dynamiczną, znalazła uznanie wśród dydaktyków-przyrodników. Przykładowo, fizyk na swoich lekcjach, równoległe z realizacją własnego tematu, realizuje również hasła innych przedmiotów – zarówno te znane już uczniom, jak również przyszłe. Tak przeprowadzane lekcje służą pomocą nauczycielom innych przedmiotów w realizacji programu nauczania. Jest jednak zasadniczy warunek powodzenia niniejszej koncepcji nauczania – nauczyciel musi doskonale znać wiedzę z zakresu innych przedmiotów nauczania, zarówno tę, którą jego uczniowie już poznali, jak również tę, którą poznają w niedalekiej przyszłości (Sawicki, 1972, s. 32).

Filozofia nauczania według Sergiusza Hessena opiera się na założeniu, że obecne w przyrodzie „pojęcie – prawo”, jest *stałym stosunkiem między dwiema albo kilkoma zmiennymi wielkościami, z których jedną (argument) przyjmuje się za zmienną niezależną, drugą – za zmienną zależną* (Hessen,

1935, s. 284). *Przykładowo, matematyka jako nauka oparta na ścisłych prawach, wyrażająca się tym samym najwyższym stopniem uogólnienia, jest formalną podstawą samej możliwości konstruowania przyrodniczych „pojęć – praw”. Nie oznacza to jednak, że przyrodniczość odbiega od szczegółowych, jednostkowych, konkretnych faktów rzeczywistości. Przeciwnie, aby móc skonstruować i dalej zastosować dane prawo do rzeczywistości i przewidzieć przyszłość, a więc jednym słowem, aby móc opanować przyrodę poprzez posłuszeństwo dla jej praw, przyrodniczość nie może abstrahować od rzeczywistości* (Wróbel, 2013, s. 19).

Postulat korelacji ewoluował i z czasem przerodził się w znacznie szerszy postulat integracji. Integracja będąc rozwinięciem korelacji, w swojej istocie odpowiada temu wszystkiemu, co rozumiemy obecnie pod pojęciem interdyscyplinarności. U podstaw integracji leży założenie, że struktura przedmiotu winna być maksymalnie upodobniona do struktury nauki, która jest przedmiotem nauczania (Bruner, 1965, s. 35). W przypadku fizyki naukami pokrewnymi są: chemia, biologia, nauki o ziemi, astronomia, matematyka, nauki techniczne, nauki o kulturze. W tab. 1 zostały pokazane przykładowe pomysły na realizację postulatu integracji fizyki z biologią. Ktoś mógłby powiedzieć, że przykłady tam pokazane nie mają związku z matematyką. Na pierwszy rzut oka mogłoby się tak wydawać, ale każdy z przykładów „obudowany” jest modelem matematycznym. Widzimy, że pomysły zawarte w tab. 1 są zbieżne z obecną ideą interdyscyplinarnego nauczania.

Przywołany na początku artykułu cytat, odnoszący się do działalności naukowej profesora Hugona Steinhausa, podkreśla pogląd uczonego na sens uprawiania matematyki, chęć stosowania matematyki w innych naukach i w życiu praktycznym. Stąd też poszukiwanie zastosowań do gotowych wyników teoretycznych (Marczewski, 2000, s. 27).

Tabela 1. Przykłady realizacji postulatu integracji fizyki z biologią<sup>1</sup>

| Lp. | FIZYKA: Tematyka zajęć                                                                                                                                                                               | BIOLOGIA: Tematyka zajęć                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.  | Pole magnetyczne<br>Po realizacji „pola magnetycznego” możemy w ramach zajęć koła fizycznego zaproponować uczniom wykonanie eksperymentu, pokazującego wpływ pola magnetycznego na wegetację roślin. | Zaburzenia tropizmu u roślin (zjawisko magnetotropizmu)<br>Pole magnetyczne uzyskujemy przy pomocy elektromagnesu wykonanego z części rdzenia transformatora, zasilanie prądem stałym. Przyjmujemy 5-10 amperów na każdy centymetr kwadratowy rdzenia.<br>Eksperyment trwa od kilku dni do dwóch tygodni, w zależności od rodzaju roślin. |
| 2.  | Kondensatory                                                                                                                                                                                         | Ryby elektryczne<br>Przykład – kondensatory w organizmach żywych.                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 3.  | Prąd elektryczny w cieczech<br>Po omówieniu tematu poruszamy problem transportu ładunku w organizmach żywych. Wprowadzamy pojęcia: biopotencjał, bioprąd.                                            | Stawy elektroniczne w protezach kończyn                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 4.  | Fale elektromagnetyczne<br>Po omówieniu tematu można uczynić wzmiankę o szkodliwości działania fal elektromagnetycznych wielkiej częstotliwości na organizmy żywe.                                   | Katastrofa nuklearna w Czarnobylu (kwiecień 1986)                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5.  | Procesy odwracalne i nieodwracalne                                                                                                                                                                   | Organizm żywy jako struktura z punktu widzenia procesów odwracalnych i nieodwracalnych                                                                                                                                                                                                                                                    |

Źródło: opracowano na podstawie: Sawicki, M. (1972), *Związki fizyki z innymi przedmiotami nauczania*, „Fizyka w szkole”, nr 3(98), s. 32-38.

<sup>1</sup> Ciekawy artykuł z propozycjami zajęć korelujących fizykę z biologią: Rochalska, M. (2003), Wpływ pola magnetycznego na nasiona i rośliny, „Postępy Nauk Rolniczych”, nr 1/2003, s. 31-46.

W niniejszym artykule podano dziesięć przykładów – potencjalnych pomysłów na zajęcia interdyscyplinarne. W przypadku jednego z prezentowanych przykładów autor artykułu wskazuje na możliwość przeprowadzenia zajęć interdyscyplinarnych fizyczno-matematycznych z elementami humanistycznymi. Wszystkie przykłady zawierają aspekt techniczny. Wykaz przykładów i ich krótki opis zawiera tab. 2. Natomiast tab. 3 zawiera propozycję metodyczną sposobu realizacji prezentowanego materiału dydaktycznego.

Tabela 2. Wykaz i krótki opis zawartości zamieszczonych przykładów

|                                                                            | Krótki opis                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Przykład 1. Kula i dziura – zagadka edukacyjna, czyli nauka przez rozrywkę | Zagadkę rozwiązują cztery hipotetyczne osoby o różnym stopniu przygotowania matematycznego: algebraicznie – profesor uczelni wyższej, uczeń szkoły średniej, uczeń szkoły podstawowej oraz doświadczalnie – fizyk.                                       |
| Przykład 2. Monogram fotografów                                            | Wykorzystanie ciekawego monogramu do graficznego rozwiązania matematycznego i fizycznego.                                                                                                                                                                |
| Przykład 3. Mysz i ser, czyli przychodzi fizyk do matematyka               | Model matematyczny konstruowany do problemu fizycznego. Dwie grupy uczniów (matematycy i fizycy) współpracują ze sobą w celu zbudowania poprawnie działającego modelu matematycznego obrazującego proces zdobywania pożywienia przez małą głodną myszkę. |
| Przykład 4. Środek ciężkości – prostopadłościan na równi pochyłej          | Proste doświadczenie fizyczne z prostopadłościanem na równi pochyłej i jego interpretacja matematyczna.                                                                                                                                                  |
| Przykład 5. Środek ciężkości – ludzik na równi pochyłej                    | Techniczna implementacja zjawiska utrzymywania równowagi podczas chodzenia. Przykład zawiera dokładny opis techniczny.                                                                                                                                   |
| Przykład 6. Środek ciężkości – „ptak-pijak”                                | Zjawisko włoskowatości wykorzystane w zabawce „ptak-pijak”. Przykład zawiera dokładny opis techniczny.                                                                                                                                                   |
| Przykład 7. Nurek Adama Słodowego                                          | Prawo Archimidesa i prawo Pascala rozważane na przykładzie nurka skonstruowanego przez Adama Słodowego. Przykład zawiera dokładny opis techniczny.                                                                                                       |
| Przykład 8. Nurek Kłapouchego                                              | Prawo Archimidesa i prawo Pascala z elementami humanistycznymi. Wykorzystany został apokryf fragmentu „Kubusia Puchatka”.                                                                                                                                |
| Przykład 9. Poidelko – wykonaj rzecz użyteczną                             | Prawo Pascala – implementacja techniczna w postaci poidelka dla ptaków.                                                                                                                                                                                  |
| Przykład 10. Fontanna Herona                                               | Prawo Archimidesa i prawo Pascala pokazane na przykładzie fontanny Herona. Przykład zawiera model matematyczny działania fontanny Herona.                                                                                                                |
| Przykład 11. Po drugiej stronie zwierciadła płaskiego                      | Zastosowanie izometrii płaszczyzny do zjawiska odbicia światła w zwierciadle płaskim.                                                                                                                                                                    |
| Przykład 12. Dwa lustra i nieskończoność                                   | Doświadczenie fizyczne z obrazami w dwóch lustrach ustawionych pod różnymi kątami względem siebie i model matematyczny tego zjawiska.                                                                                                                    |

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Interdyscyplinarne puzzle fizyczne – aspekt metodyczny

| Cele ogólne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Cele szczegółowe                                                               | Rola nauczyciela                                                                                        | Sposoby realizacji celu                                                           | Prognozowane efekty                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania. Sprawne wykorzystywanie narzędzi matematyki w życiu codziennym, a także kształcenie myślenia matematycznego<sup>2</sup>.</p> <p>Rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komutacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija myślenie zarówno percepcyjne, jak i pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia<sup>3</sup>.</p> | Uczeń rozwija zainteresowania.                                                 | Dobór treści nauczania do możliwości uczniów.                                                           | Karta pracy – diagnoza wstępna.                                                   | Uczeń dostrzega stopień skomplikowania rozważanego problemu.                                          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Uczeń potrafi zastosować aparat matematyczny do opisu zjawisk rzeczywistych.   | Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia, szerszego spojrzenia na omawiane zagadnienia matematyczne. | Burza mózgów / Metoda delficka.<br><br><u>Przykłady 1-3</u><br><u>Przykład 10</u> | Uczeń potrafi dostrzec rolę matematyki będącej podstawą modelowania i wyjaśniania zjawisk fizycznych. |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Uczeń dostrzega interdyscyplinarny charakter obserwowanych zjawisk fizycznych. | Wzbogacenie treści zadania o elementy otoczenia rzeczywistego.                                          | Stymulowanie przez nauczyciela formy dyskusji.<br><br><u>Przykłady 1-10</u>       | Uczeń uzyskuje odpowiedzi na stawiane pytania problemowe.                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Uczeń dostrzega uniwersalny charakter metod matematycznych.                    | Wskazywanie na zbieżność opisu matematycznego stosowanego w wyjaśnianiu pozornie odległych problemów.   | <br><br><u>Przykład 3</u><br><u>Przykład 11</u>                                   | Uczeń potrafi adaptować metody matematyczne do problemów rzeczywistych.                               |

Źródło: opracowanie własne

## 1. Fizyk i matematyk. Jeden problem – dwa podejścia

Richard Feynman – uznany autorytet dydaktyczny, fizyk, laureat Nagrody Nobla, w taki oto sposób wyraża swój pogląd na problem zdobywania wiedzy naukowej: *U podstaw wszystkich nauk przyrodniczych leży zasada, którą można nieledwie uważać za ich definicję: sprawdzianem wszelkiej wiedzy jest doświadczenie. Doświadczenie jest jedyną miarą prawdy naukowej. Ale co jest źródłem samej wiedzy? Skąd się biorą prawa, które doświadczenie ma potwierdzić? Doświadczenie pomaga nam je odkrywać, w tym sensie, że daje wskazówki, naprowadza nas na właściwą drogę. Ale konieczna jest też wyobraźnia, która, opierając się na tych wskazówkach, tworzy śmiało uogólnienia i potrafi odgadnąć wspaniałą, przedziwną a jednocześnie prostą regularność ukrytą w faktach, a następnie zaplanować doświadczenia sprawdzające, czy dobrze odgadliśmy* (Feynman, 2014, s. 20). Feynman twierdził, że

<sup>2</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz. U. z 2024 r. poz. 996).

<sup>3</sup> Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz. U. z 2024 r. poz. 1019).

zrozumieć równanie to znaczy napisać jego rozwiązanie bez rozwiązywania samego równania. Stwierdzenie to ma głęboki sens. Z punktu widzenia matematyka, otrzymane rozwiązanie powinno spełniać jeden warunek – być prawidłowym rozwiązaniem danego równania. Inaczej wygląda to z punktu widzenia fizyka. Różnica polega na tym, że otrzymane rozwiązanie powinno być wprawdzie prawidłowym rozwiązaniem danego równania, lecz dodatkowo rozwiązanie to nie powinno przeczyć wynikom uzyskanym z doświadczenia (Sokołow, 1987, s. 9).

### Przykład 1

#### Kula i dziura – zagadka edukacyjna, czyli nauka przez rozrywkę

Dobrym przykładem na pokazanie podejść matematyka i fizyka do sposobu rozwiązywania danego zagadnienia rzeczywistego jest zagadka z przewierconą kulą. Zagadka pochodzi od Martina Gardnera, który był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był (Pogoda, 2011, s. 9). Zainteresowania naukowe Martina Gardnera były bardzo rozległe – od zjawisk fizycznych, łącznie z ich techniczną implementacją, przez procesy chemiczne, biologię aż po literaturę. Gardner zadał sobie pytanie, co powinien zaczerpnąć z matematyki, aby w sposób uprawniony mógł posługiwać się strukturami pozamatematycznymi. Na tak postawione pytanie, za słuszną uznał następującą odpowiedź: **nie będąc matematykiem, z matematyki trzeba zaczerpnąć nie jej wyniki i pojęcia, lecz sposób myślenia** (Kordos, 2011, s. 4-5). Na przykładzie tej zagadki zostanie przedstawione spojrzenie matematyka – *znajdź rozwiązanie przy minimum obliczeń* i spojrzenie fizyka – *zamiast obliczać, wyznacz doświadczalnie*. Oba podejścia prowadzą do tego samego rozwiązania końcowego. Podążając za poglądem Feynmana, doświadczenie fizyczne rzeczywiście pełni tutaj rolę swoistego sprawdzenia poprawności stosowanych metod matematycznych.

Zagadka matematyczna ma rozwijać umiejętność rozwiązywania problemów i pobudzać do twórczego myślenia. Rolą zagadki matematycznej jest zainteresowanie osoby rozwiązującej poruszonym problemem, a jednocześnie niezmęczenie jej, dostarczenie rozrywki z jednoczesnym elementem irytacji wynikającej z rozbieżności pomiędzy intuicją a rzeczywistym rozwiązaniem, które jest proste, lecz nieoczywiste. Rozwiązaniu zagadki ma towarzyszyć „Aha!” Martina Gardnera (Michalewicz, 2010, s. 13).

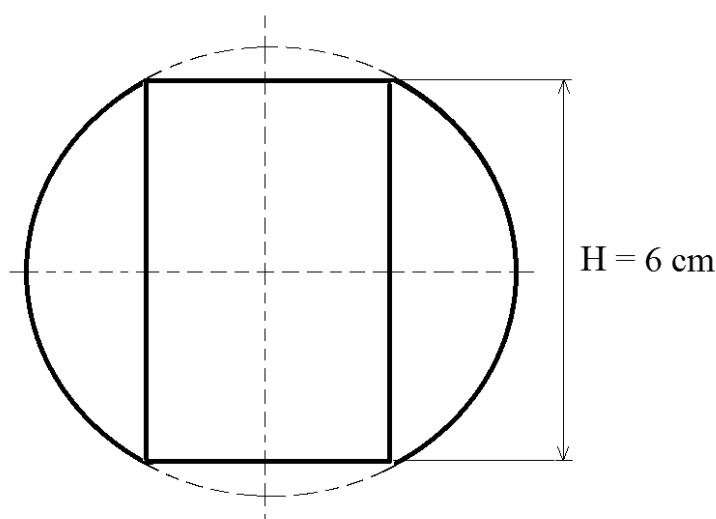
Zagadka podana przez Martina Gardnera, nazwana zagadką niewiarygodną z powodu pozornego braku danych do jej rozwiązania, spełnia podstawowe założenie stosowane również w zagadkach Hugona Steinhausa mówiące tym, że **jednakowe szanse w jej rozwiązaniu ma zarówno profesor uczelni, jak również uczeń szkoły podstawowej**. Jest to jeden z powodów, dla którego przedstawiono tu cztery różne sposoby rozwiązania zagadki, prowadzące do tego samego – jednoznacznego wyniku. Drugim, równie ważnym, powodem jest możliwość wykorzystania zagadki jako pomysłu na interdyscyplinarną lekcję matematyki bądź fizyki.

Autor artykułu wzbogacił zagadkę o elementy fabuły. Zagadkę rozwiązują niezależnie cztery osoby, w różnym stopniu do tego przygotowane:

- profesor (matematyk, dysponujący bogatym zasobem metod matematycznych, uruchamia „armatę”);
- uczeń szkoły średniej (interesujący się matematyką);
- uczeń szkoły podstawowej (uzdolniony matematycznie);
- fizyk (specjalność: fizyka doświadczalna).

Teraz pora na zagadkę (Gardner, 1998, s. 8). *W kuli wywiercono otwór w kształcie walca o wysokości 6 cm, przechodzący przez środek kuli. Jaka jest objętość pozostałej części kuli?*

Po wykonaniu stosownego rysunku, stajemy przed problemem obliczenia objętości przewierconej kuli mając jedynie jedną znaną wielkość, wysokość walca (patrz rys. 1).



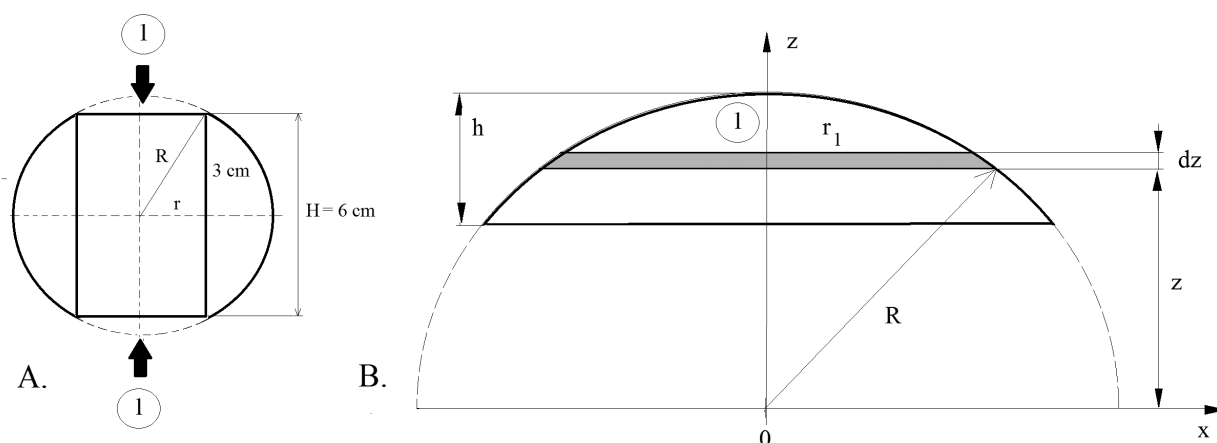
Rys. 1. Przewiercona kula w rzucie prostokątnym

Źródło: Opracowano na podstawie: Gardner, M. (1998), *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Quadrivum, s. 43.

Rozwiązanie pierwsze – matematyczne spojrzenie profesora, czyli wytaczamy armatę na pchlę

Uwaga: Niniejsza metoda rozwiązania zagadki bazuje na rachunku całkowym i z tego powodu może być wykorzystana w pracy z uczniem zdolnym. Autor uznał, że przedstawienie tej metody jest konieczne celem pełnego pokazania piękna interdyscyplinarnej zagadki Martina Gardniera.

Wracamy do podejścia profesorskiego. Profesor stwierdza: *Ależ to bardzo prosty problem. Zastosuj rachunek całkowity*. W tym celu profesor wykonuje rysunek i wprowadza stosowne oznaczenia (patrz rys. 2).



Rys. 2. Kula i dziura – podejście „profesorskie”

Źródło: opracowanie własne

Rys. 2A przedstawia przewierconą kulę z przyjętymi oznaczeniami literowymi, natomiast rys. 2B przedstawia powiększoną część kuli, która stanowi część ubytku objętości kuli w wyniku jej osiowego przewiercenia. Profesor postanowił wykorzystać rachunek całkowity do obliczenia objętości tej części kuli. W związku z tym profesor podzielił odcinek czaszy kulistej na „plasterki” o wysokości  $dz$ , widoczne na rys. 2B.

Ale po kolei. Usystematyzujmy tok postępowania w tej metodzie rozumowania. Na początku, analizując rys. 2A, zauważamy, że pomiędzy wielkościami  $R$  i  $r$  zachodzi związek:  $R^2 = r^2 + 3^2$ . Przenosząc  $r^2$  na lewą stronę równania i wykorzystując wzór skróconego mnożenia, otrzymujemy:  $(R - r) \cdot (R + r) = 9$ . Teraz łatwo już zauważyć, że parą liczb większych od zera, które spełniają powyższe równanie jest  $R = 5 \text{ cm}$  i  $r = 4 \text{ cm}$ .

Znając promień kuli obliczamy objętość pełnej, jednorodnej kuli przed osiowym przewierceniem. Objętość ta wynosi:  $V_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi 5^3 = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$ .

Następnie obliczamy objętość walca o promieniu podstawy  $r = 4 \text{ cm}$  i wysokości  $H = 6 \text{ cm}$ , stanowiąca objętość, o którą została pomniejszona pierwotna objętość jednorodnej kuli o promieniu  $R = 5 \text{ cm}$  (patrz rys. 2A).

Objętość ta wynosi:  $V = \pi r^2 H = 4^2 \cdot 6 \pi = 96 \pi \text{ cm}^3$ .

Do tej pory daliśmy radę policzyć wszystko, nie stosując rachunku całkowego. Jednakże teraz trzeba będzie obliczyć objętość części kuli oznaczonej etykietą 1 (patrz rys. 2B). W celu obliczenia tej objętości przyjęto następujące założenia: bryłę podzielono na elementy równoległe do płaszczyzny podstawy czaszy, otrzymane przez przecięcie czaszy dwiema płaszczyznami znajdującymi się w odległości  $z$  i  $z + dz$  od podstawy (element zacieniony, patrz rys. 2B). Objętość tego elementu wynosi:  $dV_1 = \pi r_1^2 dz$ . Biorąc pod uwagę zależność:  $r_1^2 + z^2 = R^2$ , otrzymujemy:  $dV_1 = \pi (R^2 - z^2) dz = \pi (25 - z^2) dz$ .

Stąd:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{R-h}^R (25 - z^2) dz = \pi \int_3^5 (25 - z^2) dz = \pi \int_3^5 25 dz - \pi \int_3^5 z^2 dz = \\ &= 25\pi z \Big|_3^5 - \frac{\pi}{3} z^3 \Big|_3^5 = 25\pi(5-3) - \frac{1}{3}\pi(5^3 - 3^3) = 50\pi - \frac{98}{3}\pi = 17\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Ostatecznie, poszukiwana objętość pozostałej części kuli wynosi:

$$\begin{aligned} V_k &= V_0 - V - 2V_1 = \frac{500}{3}\pi - 96\pi - 2 \cdot \left(17\frac{1}{3}\pi\right) = \\ &= \frac{500}{3}\pi - 130\frac{2}{3}\pi = \frac{108}{3}\pi = 36\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Cel został osiągnięty, zagadka rozwiązana. Jedyne, co może martwić, to zbyt duży nakład pracy. Tak oto wytoczona „armata” unicestwiła pchłę.

### Rozwiązanie drugie – matematyczne spojrzenie licealisty

Nasz licealista szybko spostrzegł zależność pozwalającą na określenie obu promieni i sprawnie obliczył objętości  $V_0 = \frac{500}{3} \pi \text{ cm}^3$  oraz  $V = 96 \pi \text{ cm}^3$ . Przez chwilę zatrzymał się przy obliczeniu objętości  $V_1$ . Na szczęście nie znał rachunku całkowego, bo pewnie by go użył bez zastanowienia. Tymczasem, przypomniał sobie wzór na objętość odcinka czaszy kulistej (w taki sposób opisano ten wzór w starym poradniku matematycznym, który był w bibliotece domowej) (Królikowski, 1965, s. 106):

$$V = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2).$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru:  $V_1 = \frac{\pi 2^2}{3} (3 \cdot 5 - 2) = \frac{52}{3} \pi = 17\frac{1}{3} \pi \text{ cm}^3$ .

Dalej sprawa była już prosta, wystarczyło tylko obliczyć  $V_k$ .

$$V_k = V_0 - V - 2V_1 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

#### Rozwiązanie trzecie – matematyczne spojrzenie ucznia szkoły podstawowej

Nasz matematyczny geniusz (uczeń, na którego czekamy) przeczytał treść zagadki, wykonał rysunek i przyjrzał mu się uważnie. Po otrzymaniu zależności:  $R^2 = r^2 + 3^2$ , stwierdził stanowczo: Objętość wydrążonej kuli wynosi  $36\pi \text{ cm}^3$ .

Zadanie okazało się proste.

Dla  $r = 0$  istnieje szczególne rozwiązanie równania  $R^2 = r^2 + 3^2$ .

Rozwiązaniem tym jest  $R = 3 \text{ cm}$ . Podstawiając tę wartość do wzoru na objętość kuli, otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

$$V_k = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3.$$

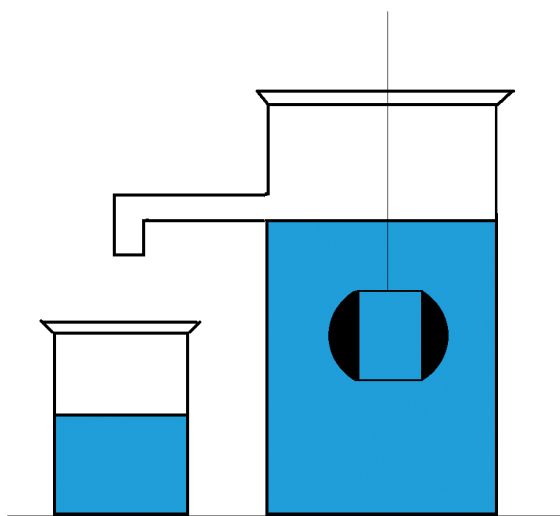
#### Rozwiązanie czwarte – spojrzenie fizyka

Na pierwszy rzut oka, zadanie wydaje się być trudne do rozwiązania. Pewnie bez rachunku całkowego się nie obejdzie. Może zatem łatwiej będzie wyznaczyć doświadczalnie poszukiwaną objętość niż ją obliczać.

Fizyk przygotowuje eksperyment. Gromadzi potrzebne materiały:

- kula z wywierconym otworem w kształcie walca o wysokości 6 cm (zakładamy, że nasz fizyk jest w posiadaniu takiej kuli);
- naczynie z wypływem bocznym, napełnione wodą;
- zlewka (pojemnik) na wodę.

Następnie fizyk wprowadza kulę do naczynia z wypływem bocznym, napełnionego wodą. Woda wyparta przez kulę wypływa do zlewki (rys. 3). Teraz wystarczy zważyć wodę, która zebrała się w zlewce. Otrzymany wynik w *gramach*, to jednocześnie objętość kuli w  $\text{cm}^3$ . Pamiętajmy, że gęstość wody wynosi  $1 \text{ g} / \text{cm}^3$ .



Rys. 3. Doświadczalne wyznaczenie objętości przewierconej kuli

Źródło: opracowanie własne

Pozostaje jeszcze historyczna wzmianka dotycząca rozwiązania niniejszej zagadki. Po opublikowaniu zagadki przez Martina Gardniera, jednym z czytelników, który szybko rozwiązał przedstawiony problem, był John W. Campbell Jr., wydawca Astounding Science Fiction. Wyszedł on z założenia, że rozwiązanie musi być jednoznaczne. Jeśli tak, to objętość powinna być stała. Zatem redukcja promienia otworu do zera pozwoli na obliczenie prawidłowej wartości poszukiwanej objętości (Gardner, 1998, s. 43). Podobnie rozumował też nasz uzdolniony matematycznie uczeń szkoły podstawowej.

## Przykład 2

### Monogram fotografów

Rozpatrzmy następujące zadanie matematyczne:

Ile czasu potrzeba braciom na wspólne przepłynięcie się dwuosobowym kajakiem na drugą stronę rzeki, jeśli każdy z nich, płynąc tym samym kajakiem samodzielnie, potrzebuje na to odpowiednio: 20 i 30 minut?

### Rozwiązanie

#### Sposób pierwszy – rozwiązanie rachunkowe

Płynąc samodzielnie, bracia pokonują w każdej minucie odpowiednio:  $\frac{1}{20}$  i  $\frac{1}{30}$  całej drogi. Zatem płynąc razem, obaj bracia pokonują w każdej minucie drogę:  $\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)d$ , gdzie  $d$  jest szerokością rzeki. Oznaczając przez  $x$  czas na przepłynięcie rzeki przez obu braci, możemy napisać:

$$\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)d \cdot x = d.$$

Po przekształceniu otrzymujemy następujące równanie:  $\frac{1}{x} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ .

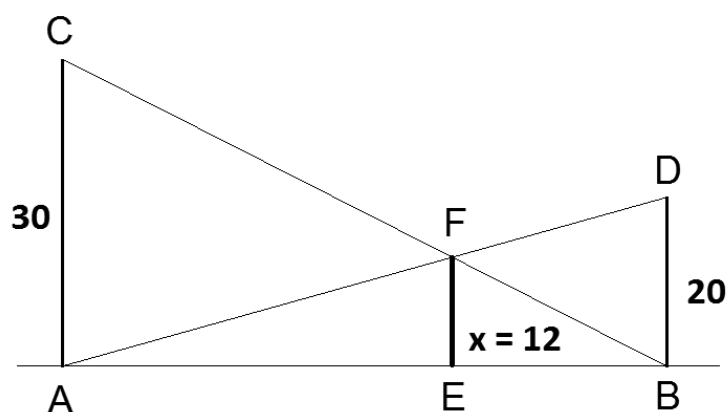
Ostatecznie otrzymujemy:  $x = 12$ , co oznacza, że obaj bracia wiosłując razem, znajdą się po drugiej stronie rzeki po 12 minutach.

#### Sposób drugi – rozwiązanie graficzne

Okazuje się, że niniejsze zadanie można również rozwiązać bez wykonywania obliczeń i to na dwa różne sposoby:

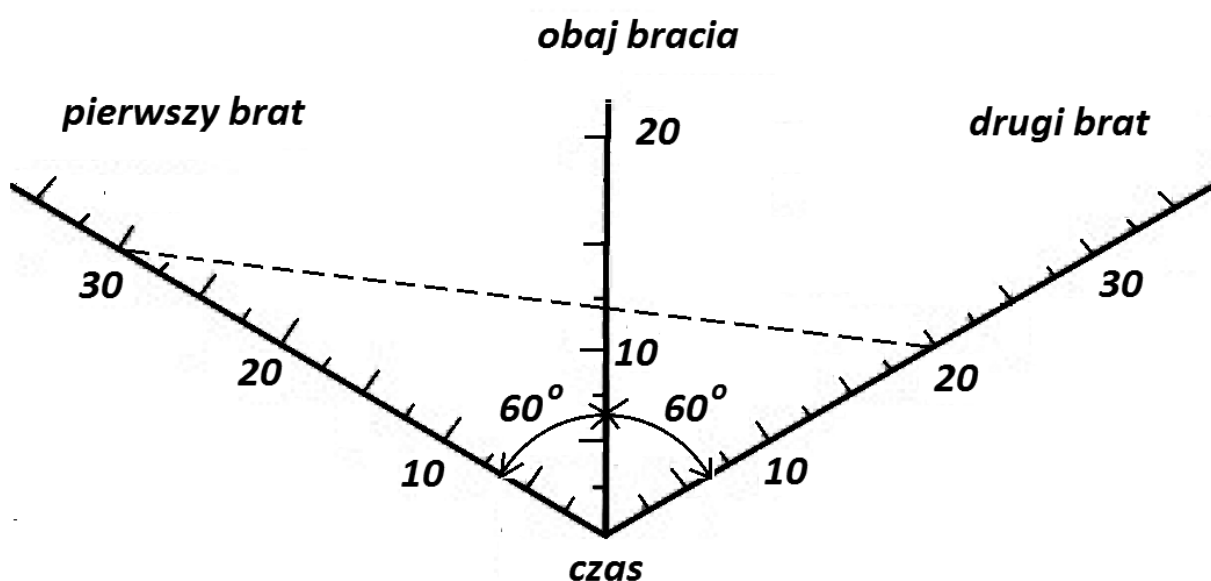
- wykorzystując znaną nam już metodę graficzną, służącą wyznaczaniu oporu zastępczego rezystorów połączonych równolegle (rys. 4)<sup>4</sup>;
- posługując się monogramem fotografów zaprezentowanym przez Hugona Steinhausa – patrz rys. 5.

<sup>4</sup> Metoda graficzna, o której mowa, została omówiona w publikacji dostępnej również w formie elektronicznej: Spustek H., Matematyka – radość tworzenia i odkrywania. Kilka raczej ciekawych przykładów, w: Po matematyczne sukcesy, red. Bieńkowska M., Czajkowska-Prokop S., Wydawnictwo DODN, Wrocław 2025, s. 64.



Rys 4. Graficzne wyznaczenie czasu wspólnego wiosłowania dwóch braci  
Źródło: opracowanie własne.

Obie metody dają identyczny wynik.



Rys. 5. Monogram pozwalający na określenie czasu wspólnego wiosłowania dwóch braci  
Źródło: Opracowano na podstawie: Steinhaus, H. (1954), *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, s. 93.

Teraz możemy uogólnić stosowanie monogramu z rys. 5 do zagadnień o następującej postaci (Steinhaus, 1954, s. 93):

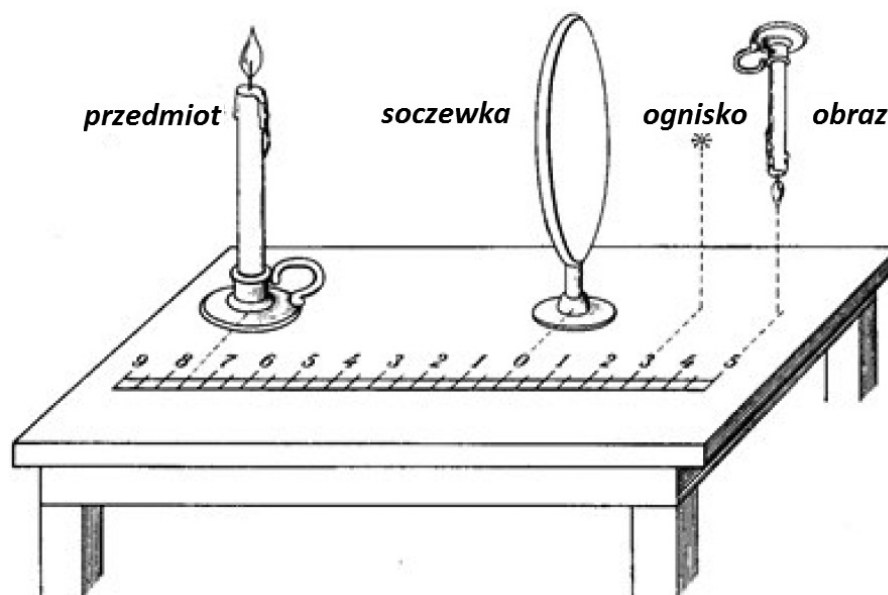
Ile czasu potrzebują dwie osoby na wspólne wykonanie danej pracy, jeśli wiadomo, że pierwsza osoba pracuje samodzielnie  $u$  jednostek czasu, a druga  $v$  jednostek czasu?

Rozwiązanie zapiszemy w postaci:  $\frac{1}{x} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ .

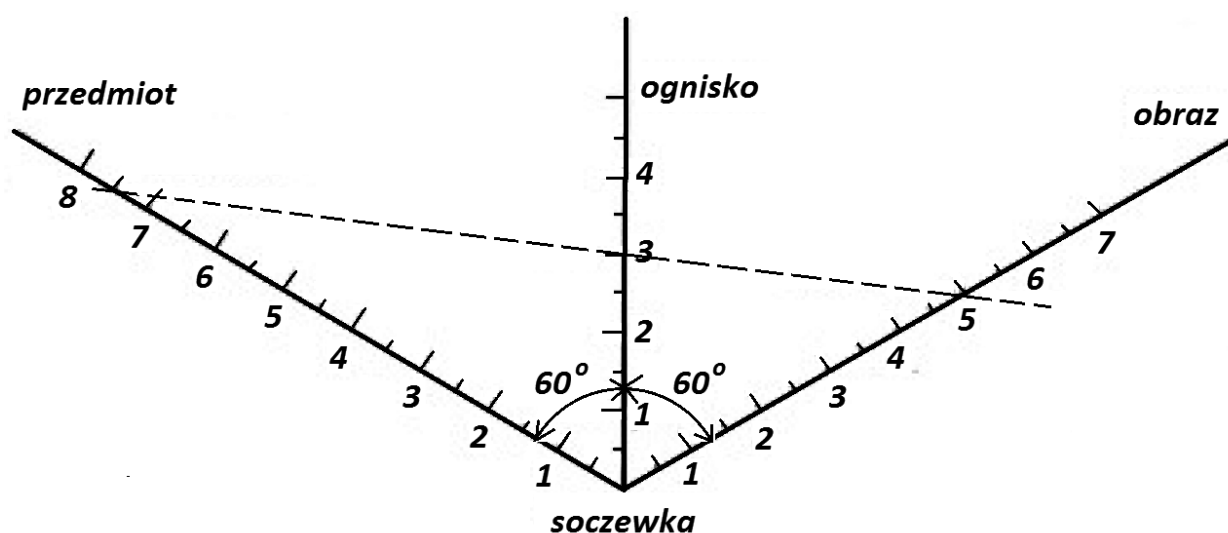
Powyższe równanie przypomina znane z fizyki, z działu optyka, równanie soczewki:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

gdzie:  $f$  – ogniskowa soczewki,  $x$  – odległość przedmiotu od soczewki,  $y$  – odległość obrazu od soczewki.



Rys. 6. Obraz rzeczywisty pomniejszony i odwrócony, otrzymany przy pomocy soczewki skupiającej. Źródło: Steinhaus, H. (1954), *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, s. 93.



Rys. 7. Monogram pozwalający na określenie odległości obrazu od soczewki skupiającej pokazanej na rys. 6.

Źródło: Steinhaus, H. (1954), *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, s. 93.

### Przykład 3

#### Mysz i ser, czyli przychodzi fizyk do matematyka

Modele matematyczne budowane przez matematyków mają różny charakter, najczęściej abstrakcyjny. Nawet w przypadku, gdy model matematyczny przystaje do rzeczywistości, to przeważnie nie stanowi zwierciadlanego jej odbicia. Fizyk poszukując modelu, który pomoże mu wyjaśnić obserwowane zjawisko rzeczywiste, czerpie z istniejących zasobów matematyka. Próbuje zaadoptować gotowy model matematyczny do własnych potrzeb. W przypadku, gdy takiego modelu nie znajduje, zmuszony jest zbudować własny model od podstaw.

Spróbujemy zbudować przykładowy model matematyczny wybranego zjawiska rzeczywistego. W procesie budowy modelu udział wezmą dwie osoby: fizyk i matematyk.

Fizyk zaproponuje i dokładnie opisze zjawisko, którego model chce wykonać. Matematyk zaproponuje postać modelu. Obie role można też powierzyć uczniom, dzieląc grupę na dwie podgrupy – fizyków i matematyków. Fizycy uzgadniają problem, matematycy proponują rozwiązanie modelowe. Nauczyciel odgrywa rolę moderatora. Nauczyciel musi przede wszystkim zadbać o to, aby problem wygenerowany przez grupę fizyków mógł zostać rozwiązany przez grupę matematyków, czyli aby był adekwatny do posiadanej wiedzy i możliwości grupy. Cały proces budowy modelu zostanie zapisany w formularzu (tabela 4).

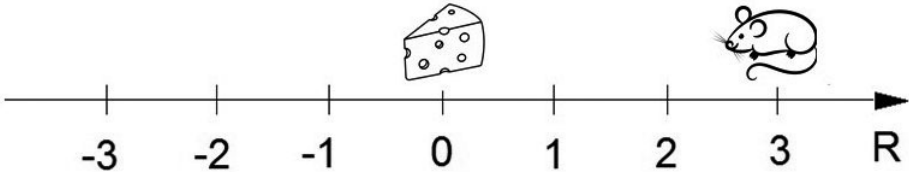
Tabela. 4. Formularz procesu budowy modelu matematycznego

| Opis zjawiska                        |                        |
|--------------------------------------|------------------------|
| .....                                |                        |
| .....                                |                        |
| .....                                |                        |
| Model zaproponowany przez matematyka | Wynik działania modelu |
| .....                                | .....                  |
| Uwagi fizyka                         |                        |
| .....                                |                        |
| Model poprawiony przez matematyka    | Wynik działania modelu |
| .....                                | .....                  |
| Uwagi fizyka                         |                        |
| .....                                |                        |
| Model poprawiony przez matematyka    | Wynik działania modelu |
| .....                                | .....                  |
| itd. ....                            |                        |

Źródło: opracowanie własne

Przykład procesu budowy modelu matematycznego wybranego zjawiska rzeczywistego

Tabela 5. Proces budowy modelu matematycznego na przykładzie zmagañ pewnej myszki próbującej zdobyć kawałek sera (Sokołow, 1987, s. 22-24)

| Opis zjawiska                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Biedna myszka błądzi wokół jamki z serem (rys. 8). Myszka znajduje się w punkcie A, natomiast ser spoczywa w punkcie O. Powierzchnia jest bardzo śliska. Zwierzę rozpęda się i próbuje dotrzeć do sera, jednakże w wyniku poślizgu ląduje po jego drugiej stronie. Myszka jest głodna, więc podejmuje drugą próbę zdobycia przysmaku. Znowu bez rezultatu – ląduje za daleko. Poszukujemy modelu matematycznego opisującego zmagania naszej myszki.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>Rys. 8. Głodna myszka i ser.</p> <p>Źródło: opracowano na podstawie: Sokołow, E. T. (1987), Centaur, czyli jak matematyka pomaga fizyce, Warszawa: PWN, s. 22-24.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Model zaproponowany przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Wynik działania modelu                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p>Założenia:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• model będzie uproszczony, nie odzwierciedli głodu i determinacji myszki w zdobywaniu pożywienia;</li> <li>• myszka jest traktowana jako punkt, podobnie jak ser (zarówno myszka, jak i ser nie posiadają wymiarów rzeczywistych);</li> <li>• odległość pomiędzy myszką i serem oznaczmy jako <math>R_n</math>, gdzie <math>n</math> oznacza kolejną próbę zdobycia sera;</li> <li>• <math>n = 1</math> odpowiada realnej sytuacji <math>R_1 = 1</math>;</li> <li>• po każdej próbie dotarcia do sera mysz powinna znajdować się bliżej pożywienia niż poprzednio, tzn. <math> R_{n+1}  &lt;  R_n </math>.</li> </ul> <p>Najprostszą zależnością spełniającą warunek odległości jest zależność odwrotnie proporcjonalna <math>\sim 1 / n</math>.</p> <p>Proponowany model ma postać:</p> $R_n = \frac{1}{n},$ <p>gdzie <math>R_n</math> odległość myszy od sera,<br/> <math>n</math> – numer kolejnej próby.</p> | <p>Podstawiając kolejne wartości liczbowe w miejsce <math>n</math> w naszym modelu, otrzymujemy następujący ciąg wartości odległości <math>R_n</math>:</p> $R_1 = 1;$ $R_2 = \frac{1}{2};$ $R_3 = \frac{1}{3};$ <p>itd.</p> <p>Dlaczego zaproponowany model nie spełnia oczekiwań fizyka?</p> |
| Uwagi fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>Niestety model jest niedoskonały. Wprawdzie odległość do sera w każdym kroku maleje, jednakże za każdym razem myszka ląduje po drugiej stronie przysmaku. Zatem model powinien uwzględniać znak (plus po prawej, minus po lewej stronie sera).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

| Model poprawiony przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Wynik działania modelu                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Zmianę znaków uzyskamy po uzupełnieniu wzoru o czynnik <math>(-1)^n</math>.</p> <p>Matematyk proponuje nowy wzór:</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$                                                                                                                                                                        | $R_1 = 1;$<br>$R_2 = -\frac{1}{2};$<br>$R_3 = \frac{1}{3};$<br>$R_4 = -\frac{1}{4};$<br>itd.<br>Czy teraz model spełnia już oczekiwania fizyka? |
| Uwagi fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                 |
| <p>Fizyk jest nadal niezadowolony. Mysz rzeczywiście zbliża się do sera z każdym krokiem działania modelu. Wielokrotnie przeskakuje ser i zatrzymuje się z drugiej strony. Ale prawdziwa mysz jest znacznie mądrzejsza od prezentowanego modelu i zbliża się do sera znacznie szybciej. Trzeba to koniecznie uwzględnić!</p> |                                                                                                                                                 |
| Model poprawiony przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Wynik działania modelu                                                                                                                          |
| <p>Matematyk proponuje w mianowniku modelu wymienić <math>n</math> na <math>n^2</math>. Nowy model wygląda tak:</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$                                                                                                                                                                           | $R_1 = 1;$<br>$R_2 = -\frac{1}{4};$<br>$R_3 = \frac{1}{9};$<br>$R_4 = -\frac{1}{16};$<br>itd.<br>A teraz może już być?                          |
| Uwagi fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                 |
| A nie można jeszcze szybciej?                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                 |
| Model poprawiony przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Wynik działania modelu                                                                                                                          |
| <p>Matematyk poprawia model. Wymienia w mianowniku <math>n^2</math> na <math>n^n</math>:</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$                                                                                                                                                                                                  | $R_1 = 1;$<br>$R_2 = -\frac{1}{4};$<br>$R_3 = \frac{1}{27};$<br>$R_4 = -\frac{1}{64};$<br>itd.                                                  |
| Uwagi fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                 |
| <p>Tak, teraz model jest znacznie lepszy. Przydałaby się jednak możliwość regulacji prędkości. Skoro możemy przyspieszać, to zróbmy spowolnienie.</p>                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                 |

| Model poprawiony przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Wynik działania modelu                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Prosty zabieg pozwoli spełnić życzenie fizyka. Wystarczy w mianowniku wymienić <math>n^n</math> na <math>n^{1/2}</math> i będzie spowolnienie. Nowy model:</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/2}}$                                                                                                                                                                             | $R_1 = 1;$<br>$R_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7;$<br>$R_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58;$<br>$R_4 = -\frac{1}{2};$<br>itd.<br>Opinia matematyka: Model jest gotowy. Potrafimy przyspieszać i opóźniać myszkę.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Uwagi fizyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>Tak, z matematycznego punktu widzenia wszystko jest dobrze, ale nasza myszka niestety ginie z głodu. Zbliża się do sera, ale nigdy go nie dostanie. Trzeba w modelu uwzględnić wymiary myszki i wymiary sera. Obecny model jest zły, ponieważ błędne jest założenie początkowe o zerowych wymiarach myszki i sera. Trzeba wyrzucić to założenie i wszystko będzie dobrze.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| Model poprawiony przez matematyka                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Wynik działania modelu                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p>Matematyczna strona modelu pozostaje bez zmian. Zmieniamy założenia dotyczące wymiarów myszki. Zakładamy, że myszka dotrze do sera, gdy jej środek będzie oddległy od pożywienia o 0,05 od punku 0. To chwilowo wystarczy, nie musimy (choć możemy) przyjąć też rzeczywistych wymiarów sera.</p>                                                                              | <p>Jeśli pozostaniemy przy pierwotnych założeniach, to w przypadku pierwszej propozycji naszego modelu: <math>R_n = \frac{1}{n}</math>, po <math>n = 1000</math> myszka będzie oddległa od sera o <math>R_n = 0,001</math> swojej pierwotnej odległości. Niestety myszka ginie ze zmęczenia, cel nie został osiągnięty.</p> <p>Natomiast po wprowadzonej zmianie w założeniu modelowym dotyczącej wielkości myszki, cel zostaje osiągnięty po <math>n = 20</math> krokach.</p> <p>W przypadku modelu:</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$ <p>cel zostaje osiągnięty już po <math>n = 5</math> krokach, a w przypadku modelu</p> $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1/2}}$ <p>nastąpi to dopiero po <math>n = 400</math> krokach.</p> |
| Model jest gotowy.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

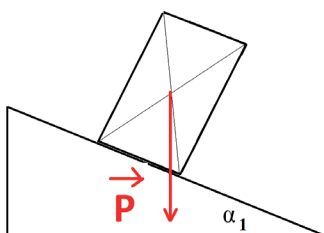
Źródło: opracowanie własne na podstawie: Sokołow, E. T. (1987), *Centaur, czyli jak matematyka pomaga fizyce*, Warszawa: PWN, s. 22-24.

Na podstawie przedstawionego wyżej przykładu można wygenerować inne ciekawe pomysły na przeprowadzenia podobnych zajęć interdyscyplinarnych. Wydaje się, że najcenniejszą wartością dodaną tego typu zajęć jest pokazanie uczniom przydatności matematyki do konstruowania matematycznych modeli procesów rzeczywistych. W naszym modelu mieliśmy do czynienia z ciągiem liczbowym o różnej zbieżności. Z matematycznego punktu widzenia jest to abstrakcyjny ciąg liczbowy. Tymczasem okazuje się, że może on mieć interesującą interpretację fizyczną – i o to w tym wszystkim chodzi!

## 2. Fizyka i technika z matematyką w tle (i nie tylko) – eksperymenty proste a inspirujące

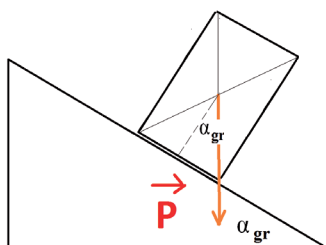
Zacznijmy od tego, iż źle się stało, że dwa przedmioty: technika i fizyka, występujące w podstawie programowej szkoły podstawowej, od dawna już nie są realizowane równoległe. Równoległa realizacja tych przedmiotów (przynajmniej przez rok, w klasie szóstej) byłaby z korzyścią dla tych uczniów, którzy wykazują uzdolnienia w kierunku technicznym. Fizyka jest nierozdzielnie związana z techniką. Każdy eksperyment opiera się o środki techniczne. Zatem korelacja tych dwóch przedmiotów byłaby wręcz oczywista. W obecnej sytuacji pozostaje propozycja realizacji niżej proponowanych przykładów w ramach lekcji techniki lub zajęć pozalekcyjnych, kółek zainteresowań lub zajęć w świetlicy szkolnej. Można także zachęcić zainteresowanych uczniów do samodzielnego wykonania omówionych tutaj doświadczeń.

A.

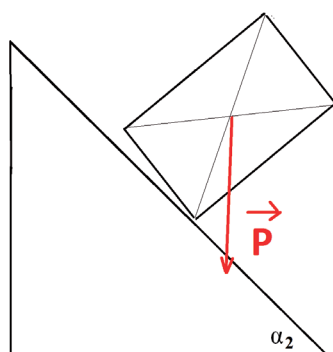


$$\alpha_1 < \alpha_{gr}$$

B.



C.



$$\alpha_2 > \alpha_{gr}$$

### Przykład 4

#### Środek ciężkości – prostopadłościan na równi pochyłej

Na równi pochyłej o regulowanym kącie nachylenia ustawiono prostopadłościan o znanych wymiarach. Przy jakim granicznym kącie nachylenia powierzchni równi do poziomu prostopadłościan pozostaje w równowadze (rys. 9)?

Rys. 9. Prostopadłościan na równi pochyłej

Źródło: opracowanie własne

Na podstawie analizy rys. 9 możemy stwierdzić, że prostopadłościan pozostaje w równowadze, dopóki prostopadła do podłoża, wystawiona ze środka ciężkości prostopadłościanu, nie wyjdzie poza jego podstawę (patrz rys. 9B). W momencie, gdy kąt nachylenia równi do podłoża będzie większy od kąta granicznego  $\alpha_{gr}$ , prostopadłościan przewróci się. Znając wymiary prostopadłościanu, możemy łatwo obliczyć wartość kąta granicznego.

### Implementacja fizyczna

Fizyczna realizacja przedstawionego wyżej problemu jest niezmiernie prosta. Wystarczy skleić z brystolu prostopadłościan i wyposażyć go w prosty wskaźnik (patyczek zawieszony na nitce) pokazujący zmienny kierunek działania siły ciężkości wraz ze wzrostem wartości kąta nachylenia równi do podłoża. Równią pochyłą może być dowolna deseczka. Dołączenie do deseczki kątomierza pozwoli zmierzyć kąt graniczny. Ten sam kąt wyznaczymy też matematycznie (patrz rys. 9B).

## **Przykład 5**

### **Środek ciężkości – ludzik na równi pochyłej**

Wprowadzimy teraz trochę dynamiki. Doświadczenie z ludzikiem na równi pochyłej ma już ponad pięćdziesiąt lat. Pomimo tego, warto przypomnieć to doświadczenie, ze względu na jego dużą wartość dydaktyczną. Zbudujemy ludzika, który będzie samodzielnie szedł w dół równi pochyłej i wcale się nie przewróci, chociaż wydawałoby się, że chodzić nie powinien.

Zanim jednak wyjaśnimy szczegóły techniczne budowy ludzika, odpowiedzmy sobie na pytanie: Dlaczego chodzimy nie przewracając się? Jaki mechanizm zapobiega upadkowi podczas chodzenia? Wy tłumaczenie jest proste:

*Przypuśćmy, że człowiek stoi na jednej nodze, np. na prawej. Wyobraźmy sobie, że podnosi piętę, jednocześnie pochylając tułów ku przodowi. W takim położeniu prostopadła ze środka ciężkości wyjdzie poza powierzchnię podstawy oparcia i człowiek musi upaść. Ale zaledwie zaczyna się padanie, gdy lewa noga, która została w powietrzu, szybko wysuwa się naprzód i staje na ziemi przed prostopadłą ze środka ciężkości, tak że prostopadła trafia na powierzchnię utworzoną przez linie, które łączą punkty oparcia obu nóg. Równowaga w ten sposób zostaje przywrócona, człowiek stanął, zrobił krok. Może się on zatrzymać w tym dosyć męczącym położeniu, ale jeśli ma iść dalej, to pochyla ciało jeszcze bardziej naprzód, przenosi prostopadłą ze środka ciężkości poza granice powierzchni podstawy i w chwili grożącego upadku znowu wysuwa nogę naprzód, ale już prawą, a lewą – robi nowy krok itd. A więc chodzenie jest właściwie zapobieganiem upadkowi ku przodowi dzięki temu, że noga znajdująca się w tyle daje ciału w porę punkt oparcia (Perelman, 1954, s. 30).*

Mając na uwadze powyższy opis procesu chodzenia, musimy odpowiednio skonstruować naszego ludzika. Aby mógł on spacerować w dół równi pochyłej, powinien utrzymywać równowagę, stojąc na powierzchni płaskiej z jedną nogą podniesioną do góry i sygnalizując w ten sposób rozpoczęcie procesu chodzenia. Zatem niezmiernie istotne są tu dwa elementy konstrukcyjne: odpowiednie proporcje poszczególnych części składowych ludzika oraz właściwe położenie obu podstawek jego nóg (fot. 1). Zwróćmy uwagę na widoczne na fot. 1 obciążenie tułowia (wystająca część śrubki M3 wraz z nakrętkami). Obciążenie tułowia możemy regulować poprzez dodawanie lub odejmowanie liczby nakrętek i podkładek znajdujących się na śrubce. Pozwala to na właściwe wyważenie ludzika. Nasz ludzik stoi na lewej nodze z jednocześnie podniesioną nogą prawą. Podstawka nogi prawej została przyklejona do nogi na stałe, natomiast podstawka nogi lewej ma możliwość „regulacji” kąta nachylenia poprzez montaż nogi na wpust, bez stałego mocowania na klej. W ten sposób, możemy zaobserwować, że

istnieje takie położenie podstawki nogi lewej, przy którym odchylenie tułowia do tyłu powoduje przewrócenie się ludezika. Na fot. 2 przedstawiono elementy składowe ludezika wraz z wymiarami.

Ludezik składa się z następujących części:

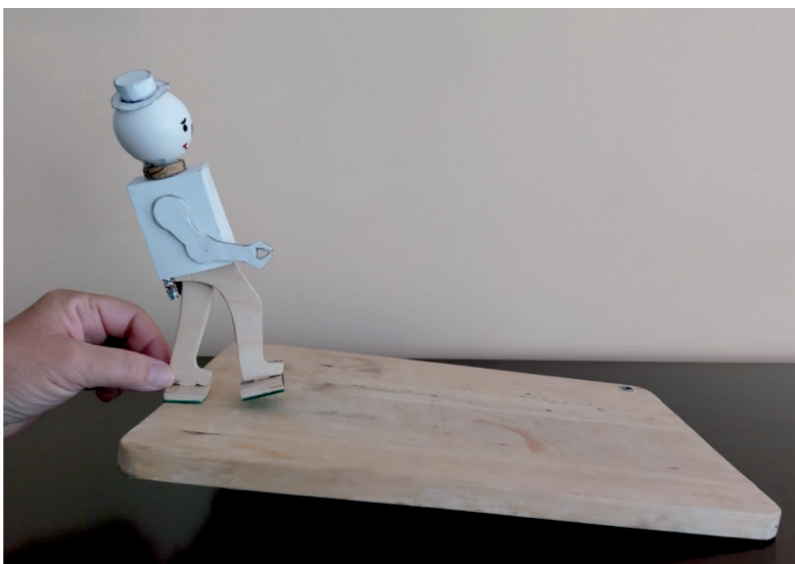
- korpus – prostopadłościan o wymiarach 40 x 20 x 55 mm wykonany z brystolu;
- głowa – piłeczka pingpongowa;
- szyja – plasterek odcięty z korka;
- ręce – wycięte z brystolu;
- dwie nogi – wycięte ze sklejki grubości 6 mm;
- rurka aluminiowa Ø6 mm, w której mocujemy obciążenie w postaci śrubki M3 ze stosowną liczbą nakrętek lub podkładek;
- gwoździć mocujący nogi ze sobą wraz z koralikiem blokującym rozłączenie się nóg;
- gwoździć ograniczający wychylenie prawej nogi (fot. 2);
- kapelusz – ozdoba wykonana z brystolu (element opcjonalny, jednakże zasadniczo podnosi estetykę ludezika).

Dodatkowo potrzebna będzie deseczka z podstawką stanowiącą równię pochyłą.

### Uwagi praktyczne

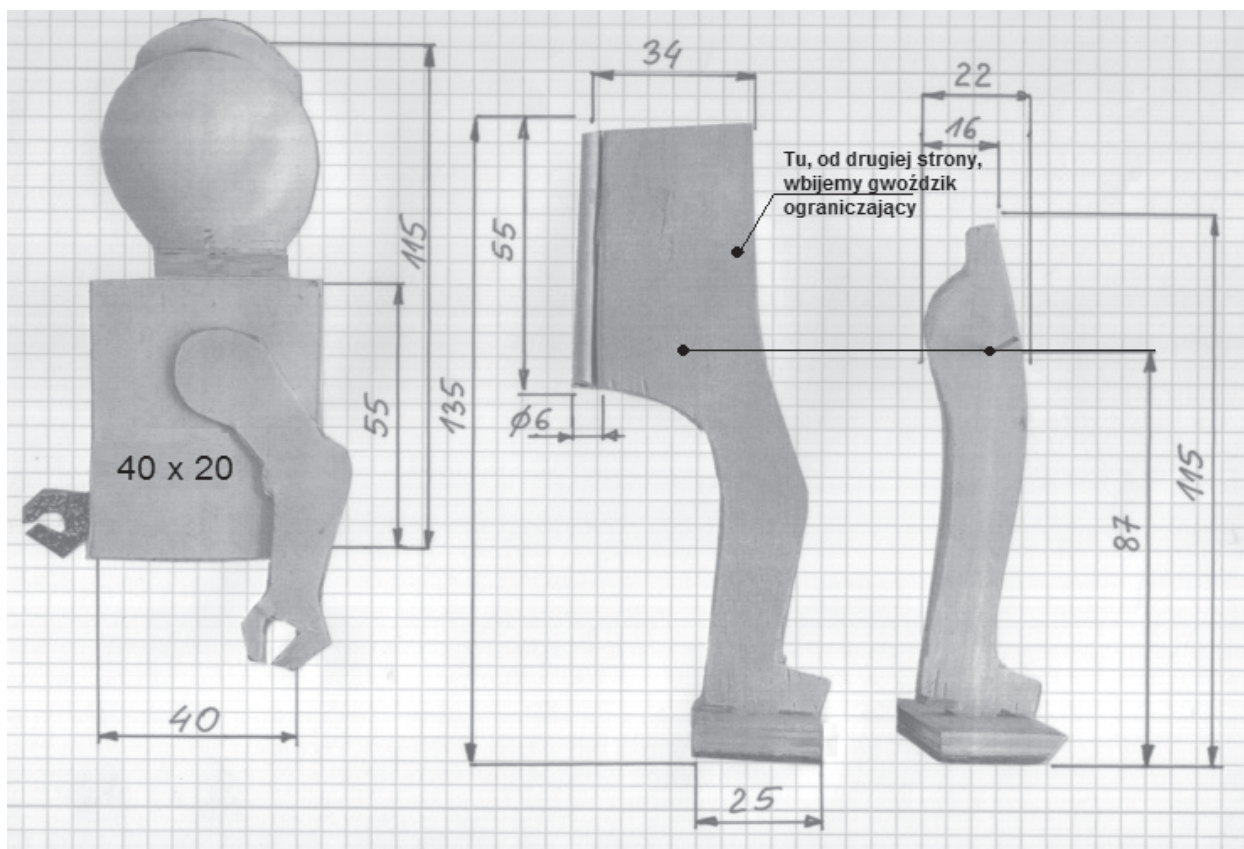
Warunkiem powodzenia doświadczenia z ludezikiem jest:

- właściwe wyważenie ludezika;
- właściwy kąt ustawienia podstawki lewej nogi;
- podklejenie podstawek obu nóg (najlepiej filcem) celem zabezpieczenia ludezika przed ślizganiem się podczas spaceru w dół równi pochyłej;
- właściwe ustawienie kąta pochylenia równi (kąt nie może być zbyt duży, wystarczy kilkanaście stopni, należy dobrać doświadczalnie).



Fot. 1. Ludezik gotowy do spaceru po równi pochyłej

Źródło: Opracowano na podstawie: Słodowy, A. (1974), *Lubię majsterkować*, Warszawa: WNT, s. 72-74.



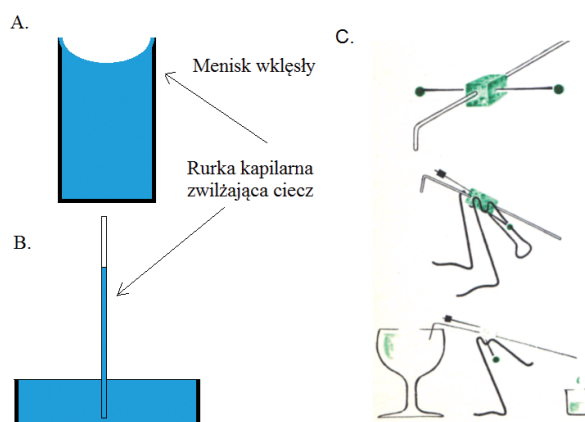
Fot. 2. Części składowe ludzika wraz z podstawowymi wymiarami

Źródło: opracowanie własne

## Przykład 6

### Środek ciężkości – „ptak-pijak”

Inspiracją do opracowania niniejszego przykładu był artykuł znaleziony w jednym z archiwalnych numerów czasopisma Delta (Gaj, 1974, s. 8-9). Proponowany tam do konstrukcji „ptak-pijak” oparty jest na zjawisku włoskowatości znanym z zachowania się cieczy w naczyniach kapilarnych (rys. 10C). Woda w rurce szklanej o bardzo małej średnicy, rzędu 0,3 – 0,5 mm zwilża ścianki naczynia, tworząc menisk wklęsły. Siły napięcia powierzchniowego powodują „wciąganie” wody (rys. 10A i B).

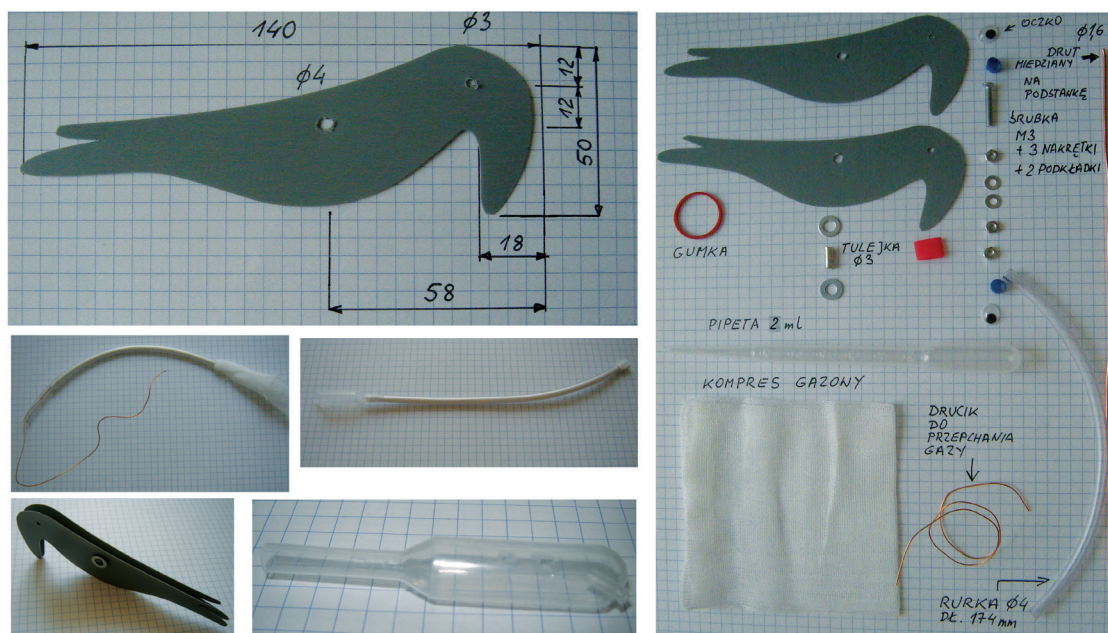


Rys. 10. Woda w szklanej rurce kapilarnej i pierwotna konstrukcja „ptaka-pijaka”

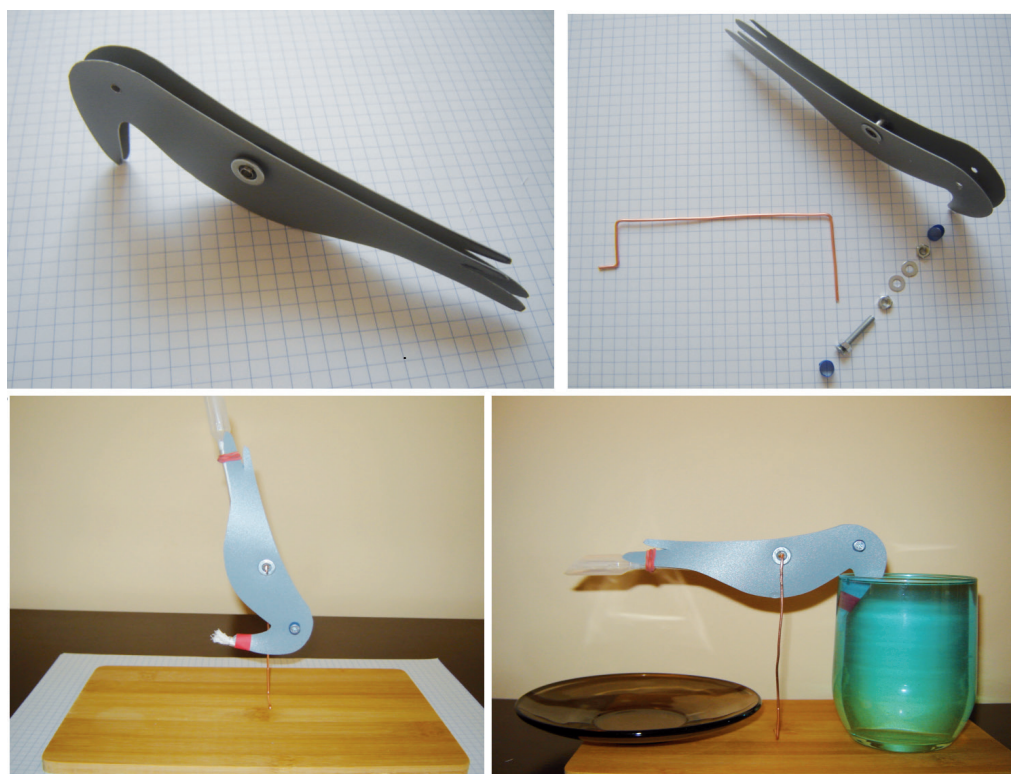
Źródło: opracowano na podstawie: Gaj, J., *Laboratorium w domu. Budujemy Perpetuum Mobile albo: I Ty możesz zostać ornitologiem*, „Delta”, nr 3/1974, s. 8.

Rurka kapilarna wygięta w kształcie ptaka, umocowana na stojaku wykonanym z drutu „pije wodę”. Woda zbiera się w ogonie, co w pewnym momencie powoduje przeważenie ptaka, ogon opada w dół i wtedy nadmiar wody wypływa do zbiorniczka znajdującego się pod ogonem. Ptak znowu zaczyna pić wodę i sytuacja się powtarza.

Autor niniejszego artykułu wykonał podobną konstrukcję. W miejsce szklanej rurki kapilarnej (trudno dostępnej i kłopotliwej w odpowiednim wygięciu) użył tamponu gazowego i pipety plastikowej. Budowę oraz montaż „ptaka-pijaka” przedstawia rys. 11 i rys. 12.



Rys. 11. Budowa ptaka-pijaka. Źródło: opracowanie własne



Rys. 12. Montaż ptaka-pijaka. Źródło: opracowanie własne

### 3. Prawo Pascala i Prawo Archimiedesa

Przykłady 7-10 ilustrują dwa prawa fizyki: prawo Pascala i prawo Archimiedesa.

Wymiar matematyczny eksponowany jest:

- w przykładzie 7 – dokładne wyważenie nurka;
- w przykładzie 9 – odniesienie do doświadczenia Torricellego;
- w przykładzie 10 – modyfikacja konstrukcji fontanny Herona.

Przykład 8 – fizyczno-humanistyczny – został tu zamieszczony w celu ukazania szerokich możliwości tkwiących w idei zajęć interdyscyplinarnych.

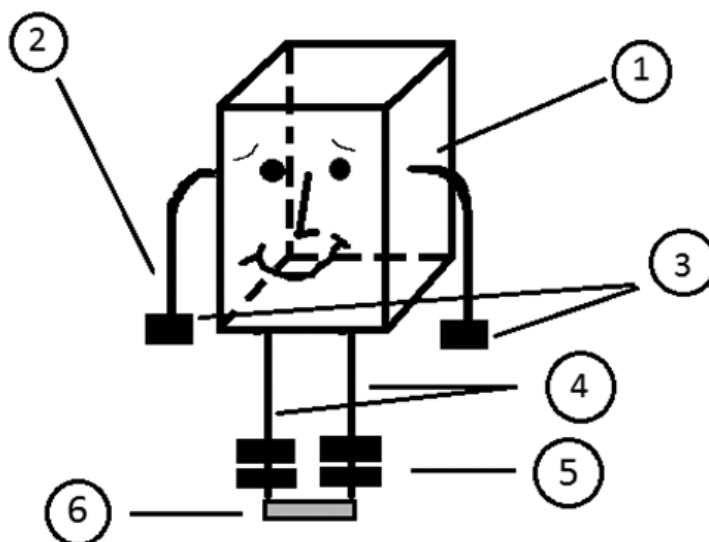
#### Przykład 7

##### Nurek Adama Słodowego<sup>5</sup>

Pokazany tutaj nurek jest jedną z wielu wersji nurka Archimiedesa. Wersja ta jest dalece niedoskonała i wręcz kapryśna w działaniu. Nurek wykonany jest z drewna, więc szybko nasiąka wodą. Powoduje to, że jest trudny w odpowiednim wyważeniu, ale o to między innymi chodzi. Pokazujemy w ten sposób istotę działania siły wyporu. Odpowiednio wyważony nurek pływa w szklanej butelce całkowicie wypełnionej wodą. Zanurza się lub wypływa na powierzchnię w zależności od siły nacisku przyłożonej do nakrętki nakręconej na butelkę, pełniącej rolę membrany.

##### Szczegóły techniczne

Na rys. 13 pokazano budowę nurka. Korpus (1) stanowi prostopadłościan wycięty z drewna brzoźowego. Ręce (2) wykonano z cienkiego drucika miedzianego. W korpusie wykonano otwór o średnicy 1 mm, przez który przeciągnięto drucik miedziany obciążony dodatkowo dwoma koralikami (3). Nogi (4) to dwa gwoźdźdiki tapicerskie o długości 35 mm. Dodatkowe obciążenie stanowią „skarpetki” (5) wykonane z koralików oraz przyczepiony do nóg magnes neodymowy (6).



Rys. 13. Budowa nurka

Źródło: opracowanie własne

Bardzo istotne jest wyważenie nurka, aby początkowo pływał on przy powierzchni wody niemal całkowicie zanurzony. Trudność właściwego wyważenia nurka polega na tym, że podczas nurkowania nasz nurek systematycznie nasiąka wodą i przez to staje się coraz cięższy, co w efekcie powoduje, że „traci on ochotę” do nurkowania. W tej sytuacji mamy dwa wyjścia: możemy wysuszyć nurka przed dalszymi próbami nurkowania lub też możemy zmniejszyć jego obciążenie poprzez zdjęcie „skarpetek” (koralików) z nóg oraz odczepienie magnesu neodymowego. Natomiast początkowo suchy nurek, do właściwej pracy, wymaga całkowitego obciążenia zgodnie z parametrami poszczególnych części składowych, podanymi w tabeli 6.

<sup>5</sup> Pomysł pochodzi od Adama Słodowego. Autor artykułu zmodyfikował nieco pierwotną budowę nurka zaproponowaną przez Adama Słodowego, w celu łatwiejszego jego wyważenia. Słodowy, A. (1974), *Lubię majsterkować*, Warszawa: WNT, s. 75.

Tabela 6. Części składowe nurka

| Nazwa elementu                    | Nr części | Wymiary [mm] | Masa [g] |
|-----------------------------------|-----------|--------------|----------|
| Korpus – drewno brzoźowe          | 1         | 18 x 18 x 25 | 6        |
| Ręce – drucik miedziany DNE 0,5   | 2         | 72           | 0,4      |
| Dwa koraliki                      | 3         | -            |          |
| Nogi – dwa gwoźdźniki tapicerskie | 4         | 35           | 1,5      |
| Cztery koraliki                   | 5         | -            | 0,4      |
| Magnes neodymowy                  | 6         | -            | 0,5      |

Źródło: opracowanie własne

### Uwagi praktyczne

Warunkiem powodzenia naszego doświadczenia jest:

- staranne wykonanie i wyważenia nurka;
- w przypadku bardzo „wysuszonego” nurka, przed eksperymentem nurkowania należy pozwolić mu na kilkunastominutowe pływanie w wodzie w celu osiągnięcia parametrów początkowych;
- szklana butelka, z dosyć elastycznym wieczkiem, które będzie pracować jako membrana;
- całkowite wypełnienie butelki wodą (nalewamy wodę aż po brzeg butelki);
- mocne zakręcenie butelki, aby powietrze zgromadzone nad lustrem wody nie uchodziło na zewnątrz podczas naciskania wieczka, co zapewni właściwy ruch nurka.

Fot. 3 pokazuje trzy fazy doświadczenia z „suchym” nurkiem (lewa strona fot. 3) oraz z nurkiem „mokrym” (prawa strona fot. 3). Analizując wielkości parametrów podanych w tabeli 6, widzimy, że masa nurka „mokrego” wzrasta o ponad 11% w stosunku do masy nurka „suchego”. Stąd tak istotne jest dostosowanie obciążenia nurka do warunków jego pracy.



Fot.3. Doświadczenie z nurkiem (z lewej strony nurek „suchy”, z prawej nurek „mokry”).

Źródło: opracowanie własne

## Przykład 8

### Nurek Kłapouchego

Jest to drugie doświadczenie z nurkiem, ale jakże inne! Balonik wypełniony powietrzem (lecz nie-nadmuchany), obciążony dwoma magnesami, pływa w plastikowej butelce wypełnionej wodą. Wykorzystano magnesy ze względu na łatwe ich zamocowanie do balonika. Równie dobrze może to być zupełnie inne obciążenie. W zależności od siły, z jaką uciskamy butelkę, balonik zanurza się coraz głębiej. Zmniejszenie nacisku butelki powoduje ruch balonika ku górze. Pomysł zaczerpnięto z artykułu zamieszczonego w czasopiśmie Delta. Artykuł zawiera apokryf z Kubusia Puchatka (Zalewski, 1996, s. 12-13). Poniżej znajduje się fragment tekstu:

- *Czy to będzie historyjka o wychłupaniu Kłapouchego ze strumienia?* – zapytał Krzyś.
- *Nie, to będzie opowiadanie o malutkim posłusznym baloniku* – powiedziałem.
- *Takim małym jak Prosiaczek?*
- *Nie, takim małym jak Mały.*
- *Ten żuczek, którego znalazł Prosiaczek na plecach Puchatka w pułapce na Hohonie?* – upewniał się zaafierowany Krzyś.
- *Tak, ten sam krewny-i-znajomy Królika, dzięki któremu Prosiaczek nie został marynarzem* – roześmiałem się – *ale dobrze, że przypomniałeś o Prosiaczku. Pamiętasz, jak Prosiaczek upadł z balonikiem dla Kłapouchego?*
- (...)

*Krzyś wziął butelkę w ręce i nacisnął, balonik posłusznie opadł, Krzyś zwolnił nacisk i nurek popłynął w górę. Wszyscy po kolei próbowali powtórzyć sztuczkę i nawet Prosiaczkowi się udało.*

- *Ciekawy jestem, dlaczego tak się dzieje?* – zastanawiał się Krzyś, gdy wracali do domu.
- *Może ten nurek się boi, jak się ściska butelkę?* – powiedział Prosiaczek.
- *Ależ Prosiaczku, przecież Ci tłumaczyłem* – sprzeciwił się Królik – *jak się ściska butelkę, to woda chce wypłynąć, natrafia na korek i zawracając spycha balonik na dół.*
- *A mnie się zdaje* – powiedział Puchatek, *że Prosiaczek ma rację. Jak się ściska butelkę, to balonik też się ściska i robi się taki, taki ...*
- *Taki gęsty jak żółdź?* – wtrącił Prosiaczek.

Jest to fantastyczny wręcz przykład połączenia treści humanistycznych z zagadnieniami fizycznymi i technicznymi.

#### Szczegóły techniczne

Fot. 4 pokazuje potrzebne materiały: plastikowa butelka wraz z nakrętką, balonik oraz dwa magnesy (wykorzystano podłużne magnesy używane np. w zamknięciach szafek kuchennych).



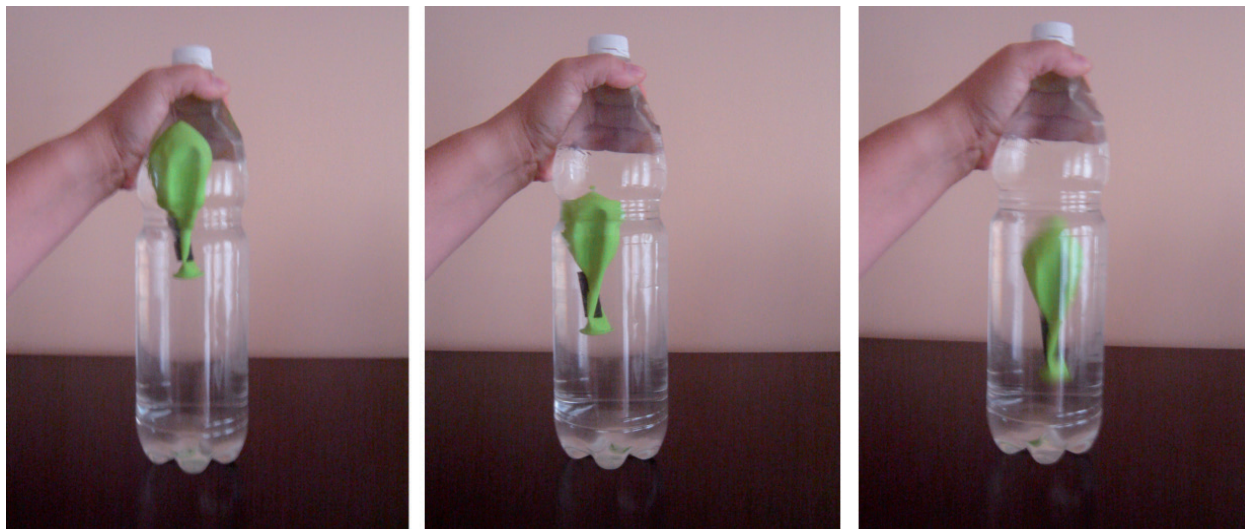
Fot. 4. Części składowe nurka Kłapouchego  
Źródło: opracowanie własne

### Uwagi praktyczne

Warunkiem powodzenia naszego doświadczenia jest:

- właściwe wyważenie balonika wraz z magnesami (zbyt ciężkie magnesy zatapiają balonik, podobnie: zbyt mała ilość powietrza w baloniku powoduje jego zatopienie);
- umiarkowana zawartość powietrza w baloniku (im więcej powietrza znajduje się w baloniku przed włożeniem go do wody wraz z magnesami, tym większej siły należy użyć, aby balonik zaczął się zanurzać);
- w doświadczeniu można również użyć butelki szklanej w miejsce plastikowej (jest to o tyle trudniejsze, że wymaga dokładniejszego wyważenia naszego nurka).

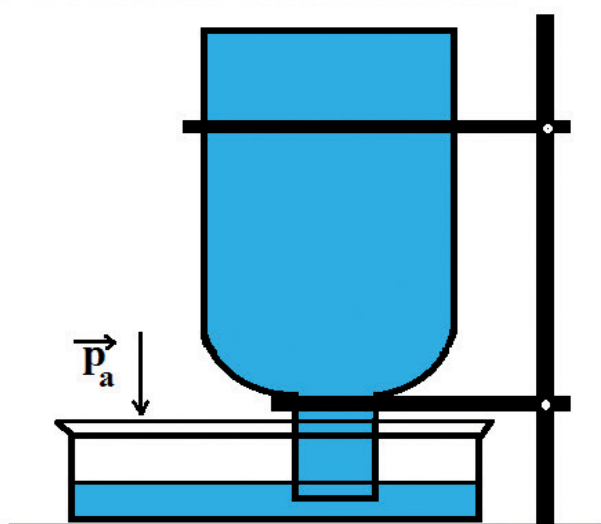
Na fot. 5 przedstawiono nurka Kłapouchego w trzech fazach ruchu.



Fot. 5. Nurek Kłapouchego w trzech fazach ruchu. Źródło: opracowanie własne

### **Przykład 9**

#### **Poidelko – wykonaj rzecz użyteczną**



A. Zasada działania



B. Model poidelka

Rys. 14. Budowa poidelka dla ptaków

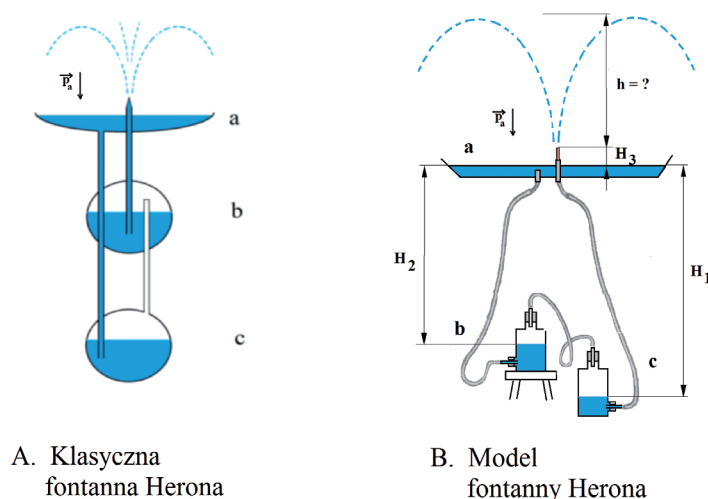
Źródło: opracowano na podstawie: Matysik, J. (1967), *Nauka o gazach w klasie szóstej (Metodyczne opracowanie zagadnienia)*, „Fizyka w szkole”, nr 2(67), s. 15.

Nasze poidelko to zamocowana na statywie i odwrócona do góry dnem butelka, zanurzona w płaskim naczyniu również wypełnionym wodą. Dlaczego woda nam się nie wylewa poza naczynie? Odpowiedź jest prosta – sprawia to ciśnienie atmosferyczne  $p_a$  (rys. 14 A). Natomiast każdy ubytek wody z naczynia dolnego jest uzupełniany wodą znajdującą się w butelce. Powstaje pytanie: dlaczego ciśnienie słupa wody zawartego w naczyniu pionowym jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego? Tu znowu z pomocą przychodzi matematyka. Wyjaśnienie matematyczne, w przystępnej formie, znajdziemy w literaturze (Piekara, 1984, s. 46-52). Rysunek 14B przedstawia model poidelka, które może być wykorzystywane praktycznie.

### Przykład 10

#### Fontanna Herona

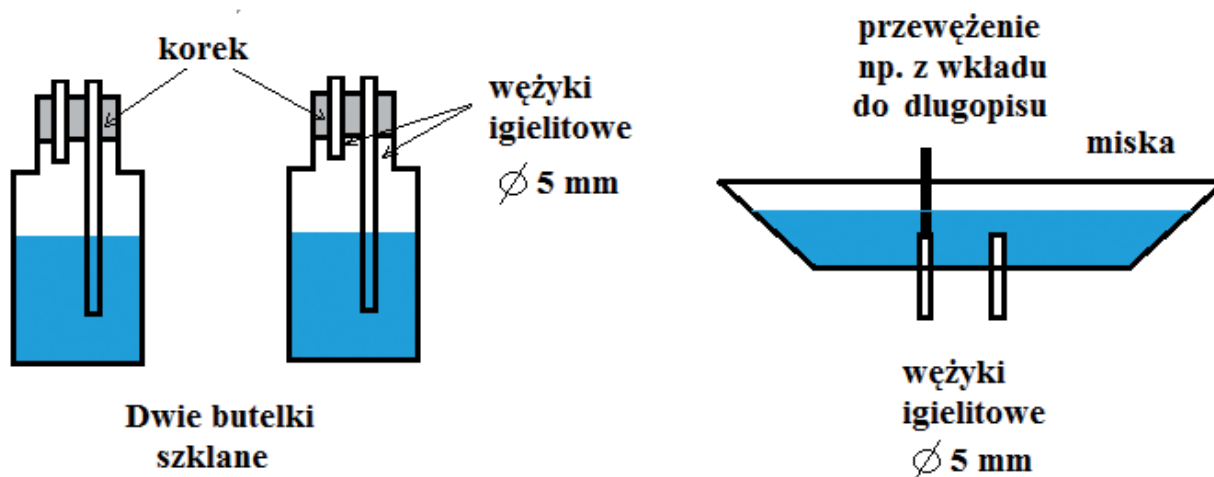
Klasyczna fontanna Herona (nazwa pochodzi od starożytnego mechanika Herona – I w. n. e.) składała się z trzech połączonych naczyń: otwartego naczynia  $a$  oraz hermetycznie zamkniętych kulistych naczyń  $b$  i  $c$  (rys. 15A). Na początku w naczyniu  $a$  znajduje się niewielka ilość wody, w naczyniu  $b$  również jest woda, natomiast w naczyniu  $c$  znajduje się powietrze. Woda przechodzi z naczynia  $a$  przez rurkę do dolnego naczynia  $c$ . Z naczynia  $c$  wypierane jest powietrze do naczynia kulistego  $b$ . Wskutek dużego ciśnienia powietrza, woda z naczynia  $b$  wychodzi rurką do naczynia  $a$  i tam tryska. Po opróżnieniu się naczynia  $b$ , cała woda przechodzi do naczynia  $b$ . Wówczas fontanna przestaje działać. Na rys. 15B pokazano model fontanny Herona zmodyfikowanej nieco pod względem technicznym. Widzimy nasadzoną końcówkę wodotrysku (górne naczynie), którą można przenosić z jednego wyprowadzenia do drugiego, w momencie, kiedy fontanna przestanie działać. Wraz z przestawieniem końcówki należy również zamienić miejscami naczynie środkowe i dolne (Perelman, 1954, s. 349).



Rys. 15. Fontanna Herona

Źródło: opracowano na podstawie: Perelmann, J. (1954), *Zajmująca fizyka*, Warszawa: Wiedza Powszechna, s. 349-351.

Autor niniejszego artykułu wprowadził jeszcze kilka modyfikacji technicznych. Na rys. 16 pokazano elementy fontanny wykonanej przez autora. Wykorzystanie w konstrukcji fontanny butelek szklanych spowodowało konieczność doprowadzenia wężyków silikonowych z góry, przy wykorzystaniu zatyczek korkowych. Należy koniecznie pamiętać, aby połączenie butelki z korkiem było dokładnie uszczelnione. Można do tego celu użyć plasteliny.



Rys. 16. Elementy fontanny Herona wykonanej przez autora artykułu. Źródło: opracowanie własne

Nasza fontanna działa wśmienicie. Pozostaje tylko pytanie: od czego zależy wysokość, na którą tryska woda? Teraz pora na matematykę. Fizyczny model fontanny Herona trzeba „ubrać” w model matematyczny.

Ciśnienie słupa cieczy w rurce łączącej naczynia  $a$  i  $c$  wynosi (patrz rys. 15):

$$p_1 = \rho g H_1 + p_a,$$

gdzie:  $H_1$  – odległość pomiędzy naczyniami  $a$  i  $c$ ,

$\rho$  – gęstość wody,

$g$  – przyspieszenie ziemskie,

$p_a$  – ciśnienie atmosferyczne.

Natomiast ciśnienie, jakiemu przeciwstawia się woda wypływająca z fontanny, wynosi:

$$p_2 = \rho g H_2 + \rho g H_3 + p_a,$$

gdzie:  $H_2$  – odległość pomiędzy naczyniami  $a$  i  $b$ ,

$H_3$  – wysokość rurki nad poziomem wody w naczyniu  $a$ .

Warunkiem działania fontanny jest:  $p_1 > p_2$ , czyli  $H_1 > H_2 + H_3$ .

W tym momencie, aby pójść dalej, musimy skorzystać z prawa Bernoulliego, czyli wyjść poza podstawę programową. Stosując prawo Bernoulliego, możemy napisać:

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho v^2}{2},$$

gdzie:  $v$  – prędkość przepływu wody w rurce (prędkość wytrysku wody).

Z powyższej zależności możemy obliczyć prędkość wypływu wody:

$$v = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}}.$$

Wstawiając w miejsce  $p_1$  oraz  $p_2$  wyżej zamieszczone zależności, otrzymujemy:

$$v = \sqrt{2g(H_1 - H_2 - H_3)}.$$

Wysokość  $h$ , na którą tryska woda w fontannie, wyznaczymy z zależności:

$$\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Wstawiając do powyższej zależności wyrażenie na prędkość wypływu wody  $v$ , otrzymujemy:

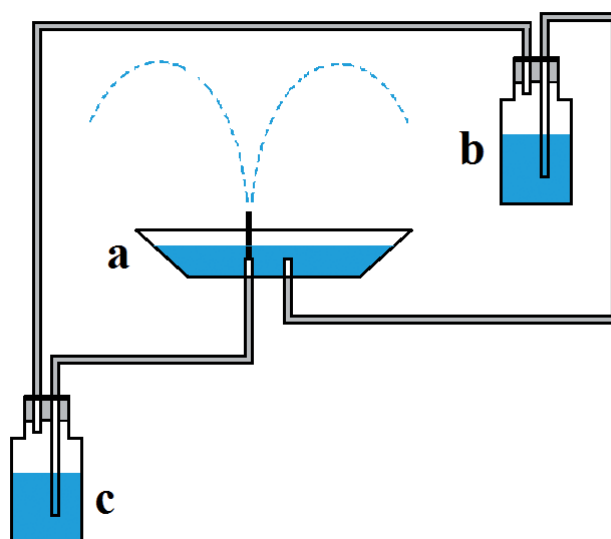
$$\rho gh = \frac{2\rho g(H_1 - H_2 - H_3)}{2},$$

$$h = H_1 - H_2 - H_3.$$

Zauważmy, że:  $H_3 \ll H_1$  oraz  $H_3 \ll H_2$ . Wobec tego można przyjąć, że:

$$h = H_1 - H_2.$$

Na podstawie wyżej przeprowadzonych obliczeń matematycznych możliwa stała się techniczna modyfikacja fontanny polegająca na obniżeniu górnego naczynia (rys. 17). Położenie tego naczynia nie ma bowiem wpływu na jakość działania fontanny, ważna jest jedynie różnica wysokości pomiędzy naczyniem dolnym i środkowym.



Rys. 17. Modyfikacja fontanny Herona. Źródło: opracowanie własne

#### 4. Geometria i optyka geometryczna

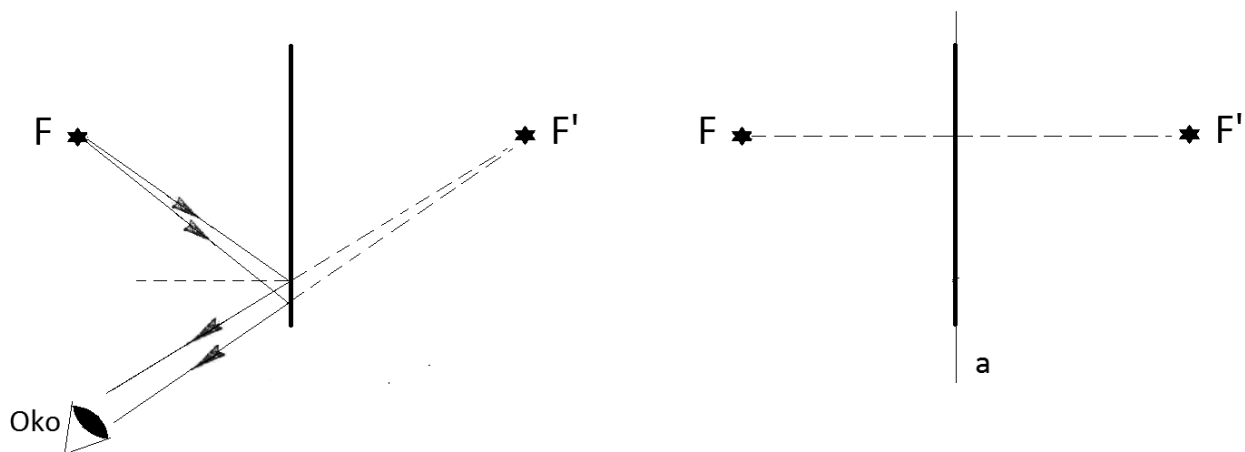
Dwa kolejne przykłady są ściśle związane ze sobą. Pokazana została tutaj korelacja pomiędzy optyką geometryczną a działem matematyki – geometrią. Oba przykłady dotyczą powstawania obrazów w zwierciadłach płaskich<sup>6</sup>. W przykładzie 11 pokazano konstrukcje geometryczne, a w przykładzie 12 doświadczenia pokazujące zmienną liczbę obrazów w zależności od kąta zawartego pomiędzy zwierciadłami płaskimi.

<sup>6</sup> Przykłady w części teoretycznej zaczerpnięto od: Sypek, T. (1980), Zastosowanie przekształceń płaszczyzny do odwzorowań optycznych, „Fizyka w szkole”, nr 4(147), s. 215-216 oraz Sypek, T. (1983), Zastosowanie izometrii płaszczyzny do zjawisk odbicia światła, „Fizyka w szkole”, nr 2(163), s. 112-113. Część doświadczenia zawarta w przykładzie 12 jest propozycją własną autora niniejszego artykułu.

### Przykład 11

#### Po drugiej stronie zwierciadła płaskiego

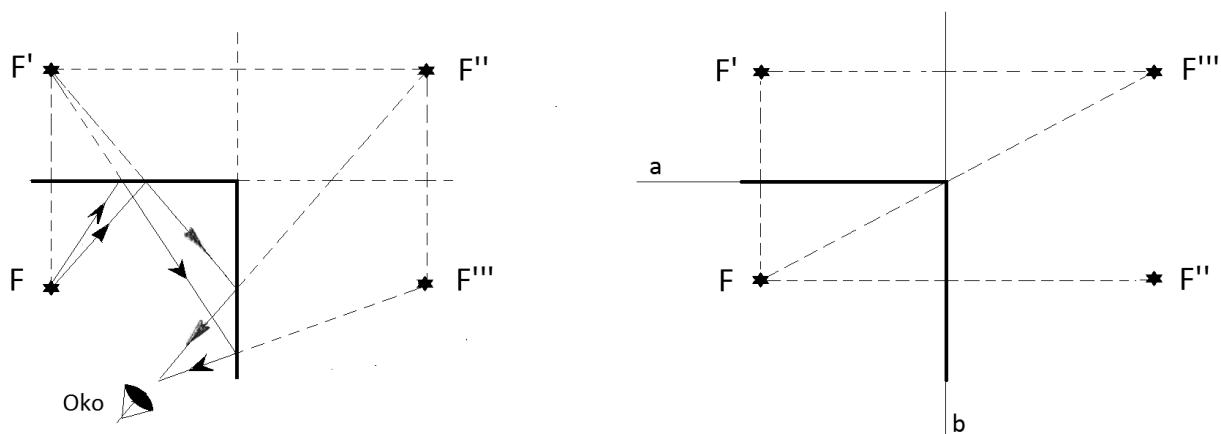
Na rys. 18-20 pokazano konstrukcję obrazów powstających w zwierciadłach płaskich. Konstrukcje obrazów wykonano na dwa sposoby. Pierwszy sposób, znany z optyki geometrycznej, polega na przeprowadzeniu promieni optycznych. Obraz powstaje na przecięciu przedłużeń promieni optycznych z uwagi na fakt, że obrazy w zwierciadłach płaskich są pozorne. Drugi sposób bazuje na przekształceniach geometrycznych (symetria osiowa i symetria środkowa). Oba sposoby prowadzą do tych samych wyników.



**A. Fizyka - optyka geometryczna**

**B. Matematyka - geometria**

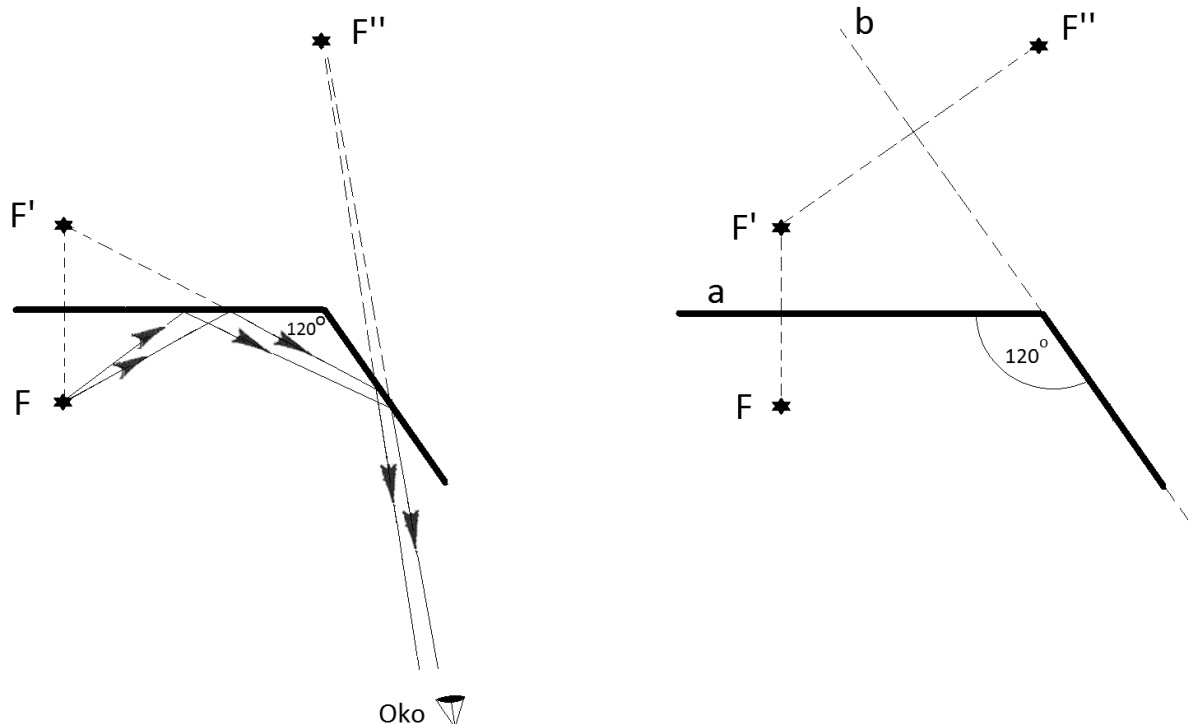
Rys. 18. Dwa sposoby konstrukcji obrazu w zwierciadle płaskim. Źródło: opracowanie własne



**A. Fizyka - optyka geometryczna**

**B. Matematyka - geometria**

Rys. 19. Dwa sposoby konstrukcji obrazów powstających w dwóch zwierciadłach płaskich tworzących kąt prosty. Źródło: opracowanie własne



**A. Fizyka - optyka geometryczna**

**B. Matematyka - geometria**

Rys. 20. Dwa sposoby konstrukcji obrazów powstających w dwóch zwierciadłach płaskich tworzących kąt  $120^\circ$ . Źródło: opracowanie własne

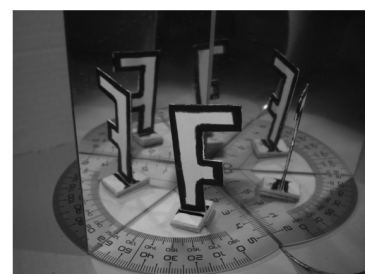
### Przykład 12

#### Dwa lustra i nieskończoność

Ustawiamy dwa zwierciadła płaskie w taki sposób, aby tworzyły one ramiona dowolnego kąta z zakresu od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Pomiedzy zwierciadłami wstawiamy przedmiot, którego obraz chcemy obserwować w zwierciadłach. W zależności od wielkości kąta, jaki tworzą zwierciadła, liczba obserwowanych obrazów jest różna (fot. 6).



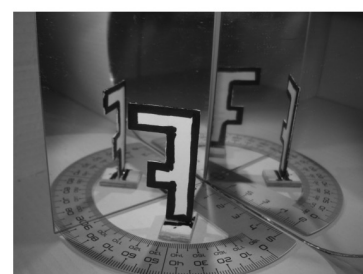
$$\alpha = 45^\circ$$



$$\alpha = 60^\circ$$



$$\alpha = 72^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ$$

Fot. 6. Obrazy uzyskane przy pomocy dwóch zwierciadeł płaskich przy różnych kątach pomiędzy nimi

Źródło: opracowanie własne

Widzimy, że liczba obserwowanych obrazów wzrasta wraz ze zmniejszaniem się kąta  $\alpha$  pomiędzy zwierciadłami. Przy kącie  $\alpha = 90^\circ$  obserwujemy trzy obrazy, przy kącie  $\alpha = 72^\circ$  widzimy cztery obrazy, a przy  $\alpha = 45^\circ$  obrazów jest aż siedem. Okazuje się, że liczbę powstających obrazów można określić następującym wzorem:

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1,$$

gdzie  $\alpha$  jest całkowitym dzielnikiem liczby 360.

Jednocześnie  $\alpha$  jest kątem, jaki tworzą ze sobą dwa zwierciadła płaskie (Bednarek, 2008, s. 18-19).

Co się stanie, jeśli zwierciadła zostaną ustawione równolegle? Wówczas kąt  $\alpha = 0^\circ$ , czyli powyższy wzór, podpowiada nam, że powinniśmy zaobserwować nieskończenie wiele obrazów. Rzeczywiście tak się dzieje – patrz fot. 7.



Fot. 7. Obraz uzyskany przy pomocy dwóch zwierciadeł płaskich ustawionych równolegle  
Źródło: opracowanie własne

$\alpha = 0^\circ$

## Zamiast zakończenia

Dwanaście przykładów interdyscyplinarnych puzzli fizycznych, sprawdzonych praktycznie przez autora niniejszego artykułu, jest pewną propozycją i oryginalnym pomysłem adresowanym nauczycielom na przeprowadzenie zajęć innych niż standardowe. Znalazły się tu przykłady prostsze i trudniejsze. Niektóre stosowane tutaj metody wykraczają poza podstawę programową, ale mimo to zostały pokazane. Stanowią one dopełnienie treści określanych jako niezbędne minimum w programie nauczania i być może przydadzą się uczniom uzdolnionym.

Kończąc, autor niniejszego artykułu życzy wszystkim entuzjastom eksperymentów fizycznych powodzenia i wielu chwil radości podczas wszelkich prób sprawdzenia i rozszerzenia doświadczeń pokazanych w artykule.

## O pojęciu odległości – od klasyki do abstrakcji

Odległość jest jednym z ważniejszych pojęć geometrii elementarnej. Dobre zrozumienie i przyswojenie tego terminu ma duże znaczenie w kursie geometrii szkoły podstawowej i średniej.

45 lat temu pisałem swoją pracę magisterską „O pojęciu odległości w X-letniej szkole średniej” w Zakładzie Geometrii i Topologii Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego pod kierunkiem prof. J. J. Charatonika. Chociaż przyszłość pokazała, że nie było żadnej 10-letniej szkoły średniej (reformy edukacji poszły w innym kierunku), to pojęcie odległości pozostało w nauczaniu geometrii i odgrywa ważną rolę. Jak w dzisiaj obowiązującym programie nauczania geometrii wyglądają etapy kształcenia tego pojęcia?

W klasach 1-3 szkoły podstawowej bazuje się na intuicyjnym rozumieniu odległości.

Polega to na:

1. porównaniu bezpośrednim – dzieci porównują dwa przedmioty używając pojęć, który dłuższy, który krótszy, wyższy, niższy, która kredka jest dłuższa, która książka jest grubsza;
2. mierzeniu przy użyciu jednostek niestandardowych za pomocą nietypowych narzędzi, np. patyków, dłoni, sznurków, kroków;
3. szacowaniu i przewidywaniu, np. ile kroków jest stąd do drzwi, czy ta linia będzie miała więcej niż 10 łokci.

Kiedy dzieci rozumieją, dlaczego mierzymy i mają zmysł „dystansu”, łatwiej jest im przyswoić jednostki miary, takie jak: centymetry, metry czy kilometry.

W klasach 4-6 uczniowie przechodzą z konkretnego mierzenia rzeczywistych przedmiotów do abstrakcyjnego rozumienia pojęcia. Odległość między dwoma punktami A i B jest zdefiniowana jako długość najkrótszej drogi z A do B. Obowiązują już formalne pojęcia: punkt, prosta i odcinek. Uczniowie rozwiązują zadania, które wymagają zastosowania pojęcia odległości, np. obliczanie obwodu figury czy odległości na mapie.

W klasach 7-8 korzysta się z definicji odległości, utrwala się to pojęcie poprzez obliczanie odległości punktów na osi liczbowej, wprowadza się wartość bezwzględną, a następnie uczniowie uczą się obliczać odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych. Kluczowym narzędziem jest tu twierdzenie Pitagorasa.

W szkole ponadpodstawowej kształtowanie pojęcia odległości odbywa się w ramach geometrii analitycznej. Polega to na łączeniu intuicji geometrycznej z aparatem analitycznym, co pozwala na obliczanie odległości w różnych sytuacjach przestrzennych. Kluczowe zagadnienia to:

1. odległość na płaszczyźnie;
2. długość wektora;
3. odległość w przestrzeni trójwymiarowej;
4. odległość między figurami:
  - odległość punktu od prostej,
  - odległość punktu od płaszczyzny,

- odległość między dwiema prostymi,
- odległość między płaszczyznami równoległymi.

W szkole ponadpodstawowej uczniowie poznają definicję odległości w zbiorze. Terminowi temu poświęcone są pierwsze lekcje z geometrii. Dlatego postaramy się nie żałować czasu na samą definicję tego pojęcia. Poniżej przedstawiono kilka scenariuszy lekcji kształtujących pojęcie odległości.

## Lekcja pierwsza

Celem lekcji jest zapoznanie uczniów z pojęciem odległości w zbiorze, a także wyrobienie umiejętności rysowania połączeń punktów.

### Zadanie 1. Czas przejścia między domami

Niech  $A$  będzie zbiorem domów, w których mieszkają uczniowie. Każdej parze domów przyporządkowujemy czas przejścia z jednego domu do drugiego.

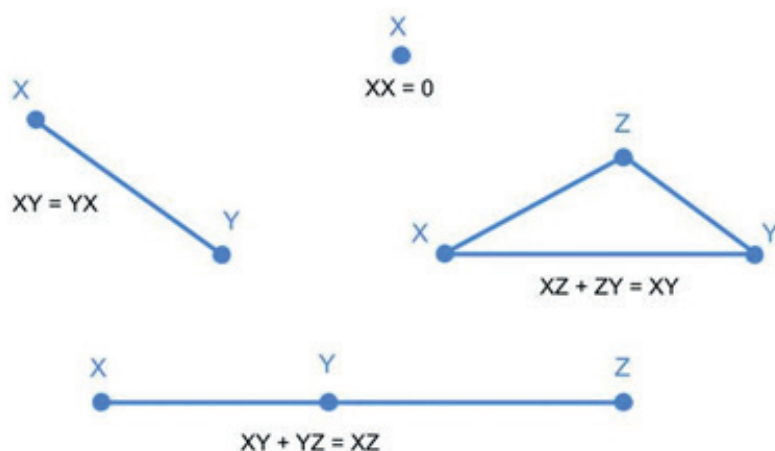
1. W jakim czasie przejdziemy z jednego domu do drugiego, jeżeli obaj uczniowie mieszkają w tym samym domu?
2. Czy idąc z domu jednego ucznia do domu drugiego, powrócimy w tym samym czasie?
3. Jeżeli idziemy z domu jednego ucznia do domu drugiego i z domu drugiego ucznia do domu trzeciego, to czy w tym samym czasie zajdziemy z domu pierwszego do domu trzeciego ucznia?

Oznaczmy trzy dowolne domy przez  $X, Y, Z$ , a czasy przejścia przez  $XY, YZ, XZ$ .

#### Obserwacje poczynione przez uczniów.

1.  $XY \geq 0$
2.  $XX = 0$
3.  $XY = YX$
4.  $XY \leq XZ + ZY$

Zilustrujemy te obserwacje (patrz rys. 1).



Rys. 1: Ilustracja do zadania 1.

Równość  $XY + YZ = XZ$  zachodzi wtedy, gdy domy znajdują się na tej samej prostej.

### Zadanie 2. Najkrótsza droga w zeszycie w kratkę

Niech  $A$  będzie zbiorem wszystkich wierzchołków kwadracików na kratkowanej kartce w zeszycie. Wybierzcie dwa dowolne wierzchołki i oznaczcie je przez  $X$ ,  $Y$ .

1. Narysujcie drogi od  $X$  do  $Y$ . Przyporządkujcie dwóm wierzchołkom liczbę boków kwadracików, po których przemieszczacie się od  $X$  do  $Y$ . Liczbę tę nazwiemy długością drogi.
2. Narysujcie przykłady najkrótszych dróg od  $X$  do  $Y$ .
3. Sprawdźcie warunki otrzymane w poprzednim zadaniu.



Rys. 2: Ilustracja do zadania 2.

Obserwacje poczynione przez uczniów.

Dla dwóch wierzchołków najkrótszych dróg jest wiele. Warunki 1-4 z poprzedniego zadania zachodzą również i w tym przypadku.

Po tych zadaniach można podać definicję odległości dwóch punktów w zbiorze:

**Odległością w zbiorze  $A$  nazywamy przyporządkowanie każdemu dwóm punktom liczby nieujemnej spełniającej następujące warunki:**

1.  $XY = 0$  wtedy i tylko wtedy  $X = Y$
2. dla każdego  $X, Y$  należących do zbioru  $A$   $XY = YX$
3. dla każdego  $X, Y, Z$  należących do  $A$   $XY \leq XZ + ZY$

## Lekcja druga

Celem lekcji jest utrwalenie aksjomatów odległości oraz kształtowanie odległości geometrycznej.

### Zadanie 3. Droga po półokręgu

Kartka w zeszycie przedstawia płaszczyznę. Wybierzcie dwa punkty i oznaczcie je przez  $X$ ,  $Y$ . Punktem tym przyporządkujemy długość drogi po półokręgu, którego środek jest środkiem odcinka  $XY$ . Sprawdźcie, czy aksjomaty odległości są spełnione.

Obserwacje poczynione przez uczniów.

Warunki 1 i 2 są spełnione w sposób oczywisty.

Sprawdzenie warunku trójkąta:

Oznaczamy długości promieni przez  $r_1, r_2, r$ . Możemy teraz napisać:

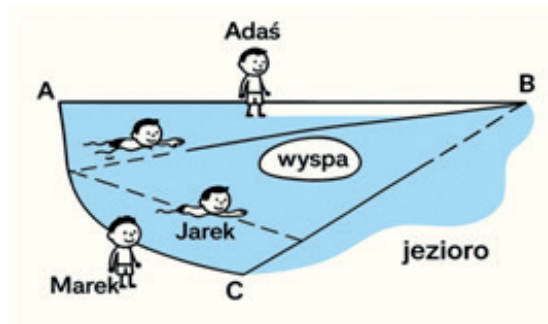
$$\frac{2\pi r}{2} \leq \frac{2\pi r_1}{2} + \frac{2\pi r_2}{2}$$
$$2r \leq 2r_1 + 2r_2$$

Nierówność ta jest prawdziwa, bo długość boku trójkąta jest zawsze mniejsza od sumy długości pozostałych boków.

Uwzględniając opisane powyżej etapy ewolucji pojęcia odległości, przechodząc od intuicyjnego do abstrakcyjnego jego rozumienia, będziemy następnie mogli, posługując się tym pojęciem, rozwiązywać bardzo wiele ciekawych zadań. Ze swojej strony bardzo zachęcałbym Koleżanki i Kolegów do wykorzystania odległości na zajęciach dodatkowych z matematyki. W moim odczuciu jest ona bardzo wdzięcznym pojęciem do zastosowania na zajęciach fakultatywnych oraz w klasach wykazujących uzdolnienia matematyczne. Jako dobry wstęp do tych zajęć proponuję poniższe zadania.

#### Zadanie 4. Jezioro i wyspa

Trzech chłopców próbuje przedostać się z punktu A do punktu B. Oba punkty znajdują się na brzegu jeziora z wyspą. Adaś potrafi dobrze pływać, Jarek pływa słabo, zaś Marek nie potrafi pływać. Zaproponuj najkrótszą drogę każdemu chłopcu. Który z chłopców może pokonać drogę, której długość jest równa odległości punktów A i B od siebie? Co można powiedzieć o tej drodze?



Rys. 3: Ilustracja do zad. 4.

Analiza matematyczna:

- **Adaś** może przepłynąć w linii prostej z A do B – jego droga to rzeczywista odległość między punktami A i B.
- **Jarek** może wybrać trasę przez wyspę, np. płynąc krótszymi odcinkami.
- **Marek** musi iść pieszo – jego droga to A do B.

Wniosek: Tylko Adaś może pokonać odległość równą rzeczywistej (geometrycznej) odległości między punktami A i B. Jego droga to najkrótszy możliwy dystans.

#### Zadanie 5. Most i rzeka

Punkt A znajduje się na jednym brzegu rzeki, punkt B na drugim. Przez rzekę prowadzi most w punkcie C. Uczeń ma zaplanować najkrótszą trasę z A do B, uwzględniając, że przejście przez rzekę możliwe jest tylko przez most. Jak zmienia się długość drogi w zależności od położenia mostu?

#### Zadanie 6. Przeszkoda i optymalna droga

Punkty A i B znajdują się na płaskim terenie, ale między nimi znajduje się ogrodzony teren (np. staw lub plac budowy). Jak wyznaczyć najkrótszą trasę z A do B, omijając przeszkodę? Czy można wykorzystać odbicie lustrzane, by znaleźć optymalną trasę?

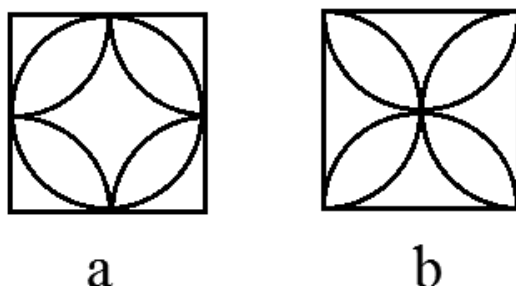
**Zadanie 7. Różne środki transportu**

Punkt A to dom, punkt B to szkoła. Część drogi można pokonać rowerem, część pieszo, a część autobusem. Jak zaplanować trasę, by droga ta była jak najkrótsza (lub najszybsza), uwzględniając różne prędkości i dostępność środków transportu?

**Zadanie 8. Podróż po kwadracie**

Znajdź odległość punktów w następujących zbiorach, poruszając się po ćwierćokręgach:

- między wybranymi przeciwległymi środkami boków kwadratu;
- między wybranymi przeciwległymi wierzchołkami kwadratu.



Rys. 4: Ilustracja do zadania 8 a i b.

**Zadanie 9. Metro**

Wyobraź sobie stacje metra  $A - B - C - D - E$ . Jako odległość przyjmujemy liczbę przystanków pomiędzy dwiema stacjami. Jaka jest odległość pomiędzy stacją A i C? Czy odległość pomiędzy stacją A i C jest równa odległości pomiędzy stacją C i E?

**Zadanie 10. Planszówka**

Na planszy  $10 \times 10$  pionek może poruszać się tylko w pionie i poziomie. Odległością pomiędzy polami jest minimalna liczba ruchów pionka od jednego pola do drugiego. Jaka jest odległość pomiędzy polami o współrzędnych (2,3) i (8,9)?

**Zadanie 11. Globus**

Oblicz odległość między Warszawą a Nowym Jorkiem, zakładając, że Ziemia jest kulą o promieniu 6371 km. Jako odległość przyjmujemy długość łuku koła wielkiego.

**Zadanie 12. Ciągi**

Oblicz odległość ciągów binarnych:

$$A = 1011010$$

$$B = 1001111$$

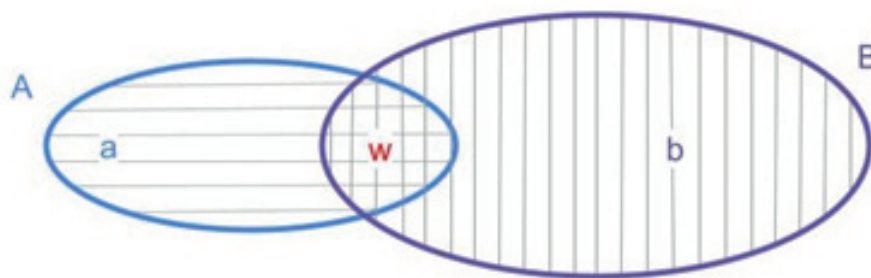
Odległość to liczba pozycji, w których dwa ciągi binarne się różnią.

Jednym z przykładów zastosowań matematyki w innych dziedzinach życia jest odległość zespołów leśnych. Przykład ten opiera się na metryce Marczewskiego-Steinhaus. Pomysł wprowadzenia tej

odległości wziął się z często spotykanego przez przyrodników problemu podobieństwa różnych zespołów roślinnych (biotopów). Botanicy uważają za podobne takie zespoły roślinne, które mało się różnią co do gatunków w nich występujących. Tak więc lasy, w których każdy gatunek spotykany w jednym, rośnie także w drugim lesie i na odwrót, uważają za podobne, natomiast takie dwa lasy, które nie mają ani jednego gatunku wspólnego – za niepodobne.

Wprowadzimy odległość zespołów leśnych. Im lasy są podobniejsze, tym są bliższe, im mniej podobne, tym dalsze. Przedstawmy graficzną ilustrację odległości zespołów leśnych. Niech  $A$  i  $B$  oznaczają obszary leśne. Obszar  $A$  i  $B$  ma tyle jednostek pola, ile gatunków, również część wspólna ma tyle jednostek pola, ile oba zespoły leśne mają wspólnych gatunków. Niech  $a$  oznacza liczbę gatunków w obszarze leśnym  $A$ ,  $b$  – liczbę gatunków w obszarze  $B$ , zaś  $w$  – liczbę wspólnych gatunków obu lasów.

Przedstawiono to na rys. 5.



Rys. 5: Ilustracja podobieństwa dwóch obszarów leśnych według metryki Marczewskiego-Steinhaus.

Dla tych obszarów leśnych odległość przy wyżej wprowadzonych oznaczeniach ta wynosi:

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \frac{a + b - 2w}{a + b - w}, & \text{dla } a + b - w > 0 \\ 0, & \text{dla } a + b - w = 0 \end{cases}$$

Przekształcając powyższy wzór, otrzymujemy:

$$\rho(A, B) = \begin{cases} 1 - \frac{w}{a + b - w}, & \text{dla } a + b - w > 0 \\ 0, & \text{dla } a + b - w = 0 \end{cases}$$

Widzimy zatem, że odległość  $\rho(A, B)$  może przyjmować wartości z przedziału  $0, 1$ .

Poniżej przedstawiono jeszcze cztery przykłady znanych, jednak niewystępujących w nauczaniu geometrii, odległości.

### Przykład 1. Odległość taksówkowa (Manhattan)

Definicja: Odległość między dwoma punktami w układzie współrzędnych liczona jako suma różnic współrzędnych:

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

W metodzie tej poruszamy się tylko wzdłuż osi – jak taksówka w mieście z siatką ulic.

Przykładowo: Oblicz odległość taksówkową między punktami A(2,3) i B(7,-1).

Rozwiązanie:

$$d = |2 - 7| + |3 - (-1)|$$

$$d = 9$$

### Przykład 2. Odległość Hamminga

Definicja: Odległość Hamminga jest równa liczbie pozycji, na których różnią się dwa ciągi (np. binarne lub tekstowe). Odległość ta stosowana jest między innymi w teorii kodów i informatyce.

Przykładowo: Ile wynosi odległość Hamminga pomiędzy ciągami: 1011101 i 1001001?

Rozwiązanie:

Dwa ciągi różnią się wyrazami na dwóch pozycjach: pozycji 3 i pozycji 5. Zatem odległość wynosi 2.

### Przykład 3. Odległość Czebyszewa (szachowa)

Definicja: Odległość Czebyszewa pomiędzy dwoma punktami jest równa maksymalnej różnicy współrzędnych (odpowiada ruchowi króla w szachach).

Odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami A i B o danych współrzędnych A(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>), B(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>) określamy wzorem:  $d = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$

Przykładowo: Oblicz odległość Czebyszewa między punktami A(3,5) i B(7,2).

Rozwiązanie

$$d = \max(|3 - 7|, |5 - 2|)$$

$$d = \max(4, 3)$$

$$d = 4$$

### Przykład 4. Odległość edycyjna (Levenshteina)

Definicja: Odległość edycyjna to minimalna liczba operacji (wstawień, usunięć, zamian) potrzebna, aby przekształcić jeden ciąg w drugi.

Przykładowo: Jaka jest odległość edycyjna między słowami „kot” i „krok”?

Rozwiązanie:

- Wstaw „r” → „krot”
- Zamień „t” na „k” → „krok” Odległość = 2

Przedstawione przykłady dotyczą obliczeń. Pomagają zrozumieć definicje. Niezwykle ciekawe, czasami zaskakujące uczniów byłoby rysowanie (przy tak zdefiniowanych odległościach, znanych dobrze uczniom z geometrii) takich figur jak: odcinek, kwadrat, okrąg.

Grupując zadania ze względu na ich cel, proponuję następujące typy zadań:

---

### 1. Zadania rysunkowe

- Narysuj kulę o promieniu  $r = 2$ , korzystając z odległości taksówkowej wokół punktu  $(0,0)$ .
- Porównaj kule w odległości euklidesowej i taksówkowej – jak różnią się ich kształty?

Takie zadania budują intuicję geometryczną i pokazują, w jaki sposób różne odległości wpływają na kształt figur.

### 2. Zadania porównawcze zmuszające do myślenia i porównania pojęć

- Dlaczego kula w odległości taksówkowej ma kształt rombu, a nie okręgu?

### 3. Zadania typu quiz

- Jaka jest odległość taksówkowa (Manhattan) między punktami  $A(2,3)$  i  $B(7,-1)$ ?

A. 10    B. 9    C. 8    D. 6

Zadania tego typu pomagają szybko sprawdzić zrozumienie pojęć.

### 4. Zadania problemowe (otwarte)

- Jak wygląda kula przy odległości taksówkowej w przestrzeni 3D?

Jeszcze wiele możliwości kryje się w związku z pojęciem odległości. Mam nadzieję, że zachęciłem Koleżanki i Kolegów do wykorzystania tego pojęcia w swojej pracy. Na zakończenie pozwolę sobie na filozoficzną sentencję: *Odległość to nie tylko liczba – to przestrzeń, którą możemy wypełnić zrozumieniem*. Artykuł oparłem o własne doświadczenia z pracy nauczyciela matematyki, posłużyłem się przykładami z przywołanej we wstępie mojej pracy magisterskiej.

## „Przychodzi budzik do zegara” – scenariusz lekcji

Inspiracją do stworzenia niniejszego scenariusza lekcji była rozmowa z uczniem:

- Czy musisz teraz używać telefonu? – zapytałam.
- Ja tylko sprawdzam godzinę, proszę pani – odpowiedział uczeń.
- Przecież zegar wisi przed tobą, więc możesz natychmiast sprawdzić godzinę – powiedziałam.
- Ale ja, proszę pani, nie znam się na tym zegarze – odrzekł uczeń, zdziwiony, że pytam.

Przyczyną tego stanu rzeczy jest zmiana technologii. Zegary tarczowe nie są praktycznie obecne w codziennym życiu naszych dzieci, które od najmłodszych lat korzystają z urządzeń cyfrowych i na co dzień posługują się „czasem cyfrowym”.

Innymi przyczynami problemów w posługiwaniu się zegarem tarczowym mogą być trudności poznawcze lub pomijanie/traktowanie pobieżnie nauki odczytywania godziny z zegara analogowego w edukacji wczesnoszkolnej. W klasach I-III dzieci mają trudności z abstrakcyjnym myśleniem, które jest niezbędne do zrozumienia mechanizmu działania zegara tarczowego, np. dlaczego „nie widać, jak idzie wskazówka godzinowa”.

Czytanie zegara tarczowego wymaga jednocześnie kilku umiejętności: rozpoznawania liczb, rozumienia podziału czasu, zależności między jednostkami czasu, orientacji przestrzennej i niekiedy zapisu liczb w systemie rzymskim. To dla niektórych uczniów może być zbyt złożone i, przy braku codziennego kontaktu z zegarem tarczowym, bardzo szybko tracą tę umiejętność, zwłaszcza że w domu sprawdzają godzinę w telefonie.

Dlaczego powinniśmy uczyć zegara tarczowego? Są co najmniej trzy powody: wymóg zawarty w podstawie programowej, praktyczne zastosowanie i rozwijanie umiejętności poznawczych.

Czytanie zegara ułatwia zrozumienie pojęcia czasu – dzieci uczą się, że sekunda, minuta, godzina to nie tylko liczby, ale proces (uczniowie obserwują, że wskazówki poruszają się), że czas płynie. Zegary tarczowe są obecne na dworcach i wielu budynkach publicznych, a moim zdaniem powinny być obecne także w szkołach.

Zegar analogowy pomaga m.in.: w nauce dzielenia i dodawania, w rozumieniu kątów i symetrii, a także w nauce ułamków i zamianie jednostek. Uczniowie, którzy rozumieją ustawienie wskazówek zegara tarczowego, nie popełniają błędów przy odczytywaniu czasu, np. nie zapisują 2 godzin i 30 minut jako 2,45.

Przedstawiony scenariusz pozwala na ćwiczenie umiejętności praktycznych potrzebnych w codziennym życiu, takich jak: obliczanie czasu trwania zdarzeń, planowanie rozkładu dnia, czytanie rozkładu jazdy pociągu.

Warto eksperymentować z zadaniami z wyraźnym kontekstem praktycznym i wykraczającymi poza typowe obliczenia rachunkowe. Można wtedy usłyszeć od uczniów: „Dużo się nauczyliśmy i dobrze się bawiliśmy”.

# SCENARIUSZ LEKCJI

---

**Temat lekcji:** „Przychodzi budzik do zegara”

**Przedmiot:** matematyka

**Klasa:** IV-V

**Wymagania szczegółowe podstawy programowej:**

1. Uczeń sprawnie wykonuje nieskomplikowane obliczenia pamięciowe na liczbach naturalnych.
2. Uczeń odczytuje i interpretuje dane przedstawione w różnej formie oraz przetwarza je w celu uzyskania dodatkowych informacji.
3. Uczeń wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach.

**Cele lekcji:**

Uczeń potrafi:

1. obliczyć upływ czasu,
2. zaznaczyć odpowiednią godzinę na tarczy zegarowej,
3. zamieniać jednostki czasu.

**Kompetencje:**

Na lekcji uczniowie rozwijają **kompetencje matematyczne** (obliczenia zegarowe, posługiwanie się rozkładem jazdy w celu podjęcia decyzji), **kompetencje społeczne, osobiste i w zakresie umiejętności uczenia się** (praca w grupach, uczenie się wzajemnie od siebie, wypracowanie wspólnego stanowiska).

**Powiązanie z wcześniejszą wiedzą:**

Uczniowie potrafią wykonywać działania na liczbach naturalnych. Znają się na zegarku. Poprawnie odczytują czas.

**Przebieg lekcji – aktywności uczniów prowadzące do osiągnięcia celów:**

Zadania na początek:

- O ile minut godzina zegarowa jest dłuższa od godziny lekcyjnej?
- Ile lekcji uczniowie mają dzisiaj w planie zajęć? Ile to godzin zegarowych?
- Ile sekund trwa przerwa?

Karta pracy (zał. 1) – praca w grupach:

Uczniowie czytają tekst i uzupełniają luki. Następnie sprawdzają poprawność odpowiedzi, wspólnie ustawiają budzik i uzasadniają swoją decyzję. W kolejnym kroku uczniowie odpowiadają na pytania do tekstu.

Ocena aktywności uczniów – oceny cyfrowe, punkty, pochwały, plusy.

Uczniowie otrzymują zadanie domowe (zał. 2).

Uzupełnijcie tekst pamiętnika brakującymi godzinami i minutami, wykonując odpowiednie obliczenia. Zwróćcie uwagę na poprawne zapisywanie czasu w formacie godzinowym.

### Z PAMIĘTNIKA PECHOWEGO ERYKA

Mama codziennie nastawia budzik na 07:05, ale w piątek miałem wstać 25 minut wcześniej, czyli o godzinie (1) \_\_\_\_\_. Zależało mi, żeby być w szkole za dwadzieścia ósma, bo umówiłem się z chłopakami, żeby poćwiczyć biegi na boisku. Nie przestawiłem budzika i oczywiście wstałem jak zwykle. 15 minut później byłem już po śniadaniu, zejście do garażu zajęło mi 3 minuty. Tata był zdenerwowany. Spojrzał na zegarek i powiedział, że nie zdążę, bo jest już (2) \_\_\_\_\_, a potrzebujemy 20 minut na dojazd – w tej sytuacji oznacza to, że będę w szkole o godzinie (3) \_\_\_\_\_. Czyli spóźnię się tylko (4) \_\_\_\_\_. Niestety samochód taty nie zapalił.

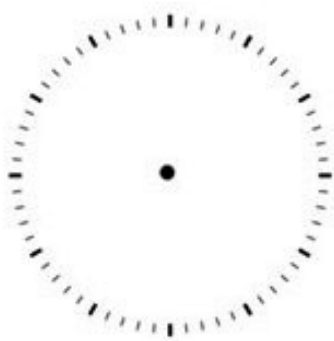
Wyskoczyłem z auta jak filip z konopi, żeby zdążyć na autobus. Policzyłem, że skoro chodzę z prędkością 100 metrów na minutę, to 700 metrów do przystanku przejdę w ciągu (5) \_\_\_\_\_ minut i zdążę na autobus, który odjeżdża wpół do ósmej. Obliczenia były dobre, ale nie wziąłem pod uwagę czasu spędzonego w samochodzie, gdy tato próbował uruchomić samochód i spóźniłem się na autobus aż 10 minut. Byłem zdenerwowany! Nagle zobaczyłem tatę, który podjechał na przystanek. Do szkoły jechaliśmy dokładnie tyle, ile przewidział i o godzinie (6) \_\_\_\_\_ byłem w szkole.

Całe szczęście, że nie spóźniłem się na WF. Po porannym „treningu” w biegu na setkę byłem o sekundę lepszy od Emila, najlepszego biegacza wśród chłopaków z klas czwartych. Zaraz musiałem pochwalić się mamie moim sukcesem biegowym. Trochę za długo gadałem przez telefon i spóźniłem się na matkę! Możecie sobie wyobrazić minę pani, gdy wszedłem 7 minut po dziewiątej, a lekcja zaczęła się o 8:55. Powiedziała: „Spóźniłeś się (7) \_\_\_\_\_ minut. My właśnie rozmawiamy o mierzeniu czasu”. Było mi smutno. No ale powiedzcie, czy to moja wina?

Kończę na dzisiaj, bo idę spać. Jutro jadę z tatą do Państwowego Muzeum im. Przypkowskich w Jędrzejowie zobaczyć największą kolekcję zegarów słonecznych w Europie. Z Wrocławia mamy pociąg do Jędrzejowa o 07:16, więc z Bolesławca musimy wyjechać o godzinie (8) \_\_\_\_\_. Na szczęście jedziemy taksówką na dworzec tylko 15 minut.

Chrrr... chrrr... chrrr...

**Nastawcie Erykowi budzik tak, aby nie spóźnił się na pociąg.**



**Odpowiedzcie na pytania:**

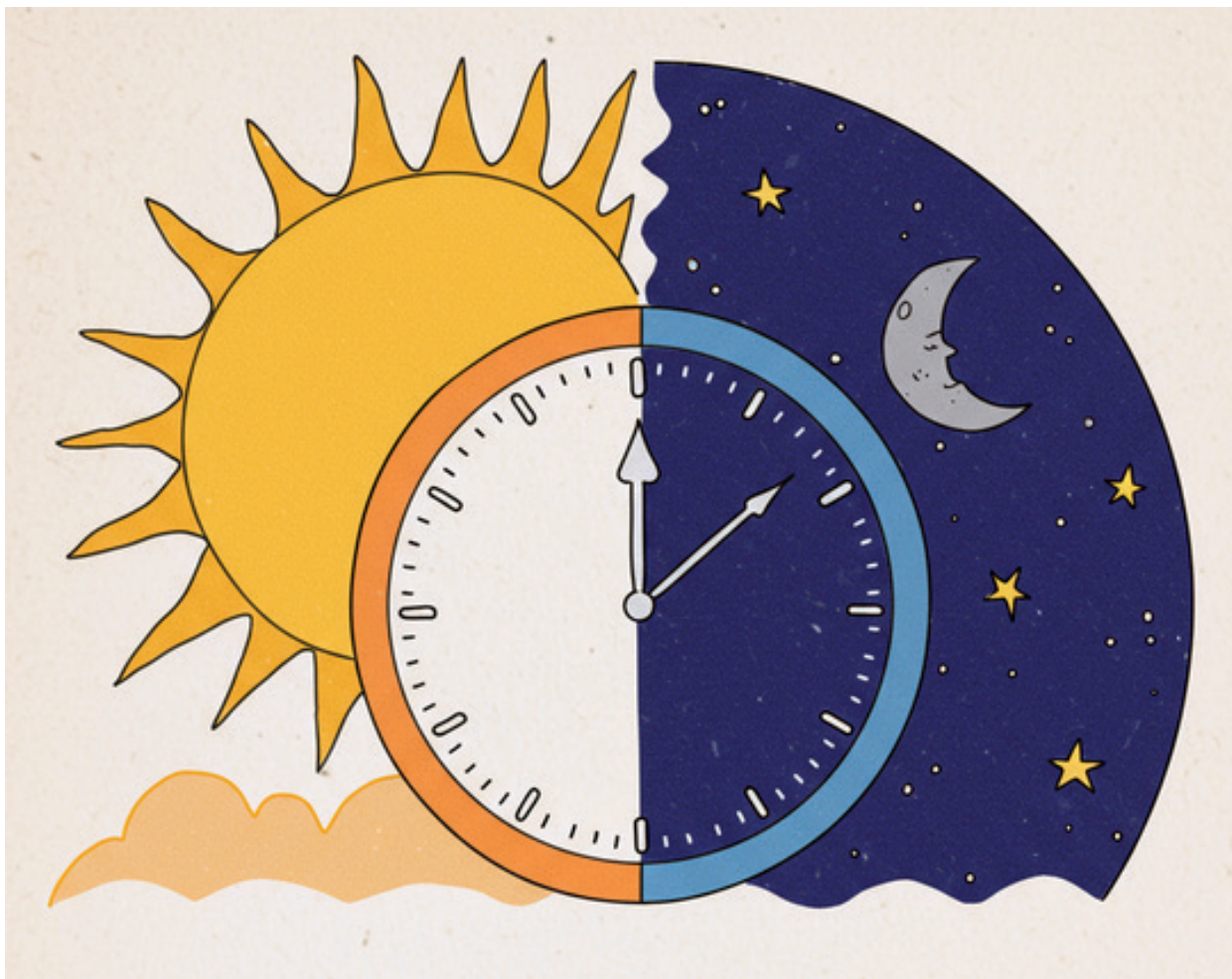
1. O której godzinie Eryk skończy lekcje w piątek, jeżeli rozpoczyna o 8:00 i w planie ma cztery godziny? Przerwy między lekcjami trwają 10 minut.  
Odp.: \_\_\_\_\_
2. Lekcja trwa 45 minut. Ile to sekund? Odp.: \_\_\_\_\_
3. O której Eryk z tatą przyjadą do Jędrzejowa, jeżeli podróż z Wrocławia trwa 5 godzin i 25 minut?  
Odp.: \_\_\_\_\_
4. Obliczcie, jak długo jadą pociągi z Bolesławca do Wrocławia i uzupełnijcie tabelę. Który z tych pociągów jedzie najkrócej?

| NR POCIĄGU | GODZINA ODJAZDU ZE STACJI BOLESŁAWIEC | GODZINA PRZYJAZDU DO STACJI<br>WROCŁAW GŁÓWNY | CZAS TRWANIA PODRÓŻY |
|------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------|
| IC 6132    | 05:06                                 | 06:07                                         |                      |
| KD 69504   | 05:16                                 | 06:46                                         |                      |
| KD 69507   | 06:00                                 | 07:19                                         |                      |
| KD 69508   | 07:00                                 | 08:34                                         |                      |

Odp.: \_\_\_\_\_

5. Eryk zwyciężył, gdyż przebiegł 100 metrów w ciągu 15 sekund. Ile czasu zajęłoby Erykowi przebycie drogi do przystanku, gdyby biegł z tą samą prędkością?

Odp.: \_\_\_\_\_

**Zadanie domowe**

Zadanie domowe otrzymałaś/-eś w \_\_\_\_\_ o godz. \_\_\_\_\_.

Gotowe rozwiązanie oddaj najpóźniej za 120 godzin.

Opisz swój jeden dzień. W opowiadaniu trzymaj się poniższych zasad:

1. Wymyśl tytuł opowiadania.
2. Twoja relacja zaczyna się słowami: „Obudziłam/-em się o godzinie...”.
3. W opowiadaniu obowiązkowo użyj zwrotów: wpół do \_\_\_\_; za kwadrans \_\_\_\_; minęło 20 minut; łącznie zajęło mi to półtorej godziny; 5 minut później.
4. Podpisz się.



## Matematyka i zdrowie – podejście interdyscyplinarne

Współczesna szkoła nie ogranicza się jedynie do przekazywania wiedzy przedmiotowej – ma także kształtować postawy i wspierać uczniów w podejmowaniu świadomych wyborów, zgodnie z zapisami podstawy programowej: „*Ważną rolę w kształceniu i wychowaniu uczniów w szkole podstawowej odgrywa edukacja zdrowotna. Zadaniem szkoły jest kształtowanie postaw prozdrowotnych uczniów, w tym wdrożenie ich do zachowań higienicznych, bezpiecznych dla zdrowia własnego i innych osób, a ponadto ugruntowanie wiedzy z zakresu prawidłowego odżywiania się, korzyści płynących z aktywności fizycznej, a także stosowania profilaktyki*”<sup>1</sup>. Ten obowiązek szkoły staje się coraz bardziej istotny. Obserwuje się bowiem stały wzrost zachorowań na choroby cywilizacyjne, problemy z kondycją psychiczną uczniów, niewłaściwe nawyki żywieniowe oraz nadmierne korzystanie z urządzeń cyfrowych (smartfony, komputery, konsole), które stały się podstawowym źródłem rozrywki dzieci i młodzieży, często prowadzącym do uzależnień. Ponadto niski poziom aktywności fizycznej i zaburzenia relacji społecznych wymagają systemowego podejścia.

W realizacji tego zadania nie mogą pozostawać na uboczu także nauczyciele matematyki. To właśnie ich przedmiot stwarza wiele okazji, by w naturalny sposób odwoływać się do treści prozdrowotnych – od analizowania danych dotyczących aktywności fizycznej, przez obliczanie wartości energetycznej posiłków, aż po interpretację statystyk związanych ze zdrowiem publicznym. Matematyka może być więc nie tylko językiem liczb, lecz także narzędziem wspierającym świadome i odpowiedzialne dbanie o zdrowie. Dobrym rozwiązaniem jest wykorzystywanie treści programowych z zakresu biologii, chemii czy wychowania fizycznego i tworzenie na ich podstawie zadań matematycznych osadzonych w realnych kontekstach życia i zdrowia. Takie interdyscyplinarne podejście pokazuje praktyczne zastosowanie matematyki, rozwija myślenie analityczne i wspiera świadome podejmowanie decyzji.

**Uczniowie często pytają: „Po co mi to w życiu?”** To pytanie każdy nauczyciel matematyki zna doskonale. Odpowiedź tkwi w codziennych sytuacjach: planowaniu posiłków, obliczaniu kalorii, dawkowaniu leków czy monitorowaniu aktywności fizycznej. Matematyka pomaga zrozumieć własne nawyki, analizować dane i podejmować decyzje oparte na faktach.

**Matematyka ma ogromny potencjał w kształtowaniu świadomych, zdrowych wyborów.** Dzięki niej uczniowie mogą lepiej rozumieć konsekwencje swoich działań, planować zdrowe nawyki i analizować dane dotyczące diety, aktywności fizycznej czy jakości snu. Rozwijają przy tym krytyczne i logiczne myślenie, uczą się samodzielności w podejmowaniu decyzji oraz dostrzegają, jak wiedza szkolna łączy się z codziennym życiem. Takie doświadczenia wzmacniają poczucie sprawczości i odpowiedzialności, a jednocześnie pokazują, że matematyka jest praktycznym narzędziem wspierającym zdrowie, dobrostan i rozwój osobisty, przygotowującym uczniów do świadomego funkcjonowania we współczesnym świecie.

<sup>1</sup> ROZPORZĄDZENIE MINISTRA EDUKACJI z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, (Dz. U. z 2024 r. poz. 996), s. 5.

W dalszej części artykułu prezentuję przykłady aktywności, gry, projekty interdyscyplinarne, konkursy oraz zadania matematyczne, których treści odnoszą się do zagadnień z zakresu profilaktyki zdrowotnej.

## PRAKTYCZNE PRZYKŁADY

---

### **Matematyka dla zdrowia – ile naprawdę kosztują używki?**

Od wielu lat moim ulubionym zadaniem dla młodzieży jest obliczanie, ile pieniędzy wydaje się na używki – w szczególności na papierosy. To ćwiczenie nie tylko rozwija umiejętności matematyczne, lecz także uświadamia uczniom, jak ogromne sumy mogą „uciekać z portfela” każdego palacza.

Pracę rozpoczynam od zadania przygotowawczego: uczniowie zbierają informacje o cenach różnych marek papierosów. Na kolejnej lekcji wspólnie zapisujemy na tablicy ceny najtańszych i najdroższych paczek, a następnie wyliczamy średnią cenę. W oparciu o te dane konstruujemy zadania matematyczne dotyczące palenia papierosów.

Zakładamy, że palacz wypala jedną paczkę dziennie i obliczamy, ile kosztuje go ten nawyk w skali miesiąca oraz roku. Wyniki, prezentowane na tablicy przez poszczególne grupy, zawsze wywołują zdumienie – uczniowie nie spodziewają się, że kwoty przeznaczane na papierosy mogą być tak wysokie.

Następnie zachęcam uczniów, aby zastanowili się, co można byłoby kupić za pieniądze wydane na papierosy. Swoje pomysły przedstawiają w formie plakatów, które powstają we współpracy z nauczycielem plastyki. Dzięki temu matematyczne obliczenia nabierają twórczego i wizualnego wymiaru.

Powstałe prace są nie tylko piękne i pomysłowe, ale także mocno oddziałują na wyobraźnię. Prezentujemy je na lekcjach plastyki, a także podczas spartakiady w konkursie na plakat o tematyce antynikotynowej. Dzięki temu prostemu zadaniu matematyka staje się narzędziem nie tylko do liczenia, lecz także do refleksji nad zdrowiem i stylem życia – a współpraca międzyprzedmiotowa pokazuje, jak wiedza z różnych dziedzin może się wzajemnie uzupełniać.

### **Inne przykłady łączące matematykę z refleksją nad zdrowiem, stylem życia**

#### **1. „Przekąski pod lupą – ile kosztuje niezdrowe jedzenie?”**

- Uczniowie sprawdzają ceny popularnych batoników, chipsów czy napojów gazowanych.
- Liczymy, ile kosztuje codzienne kupowanie „małej przekąski” w miesiącu, półroczu czy roku.
- Następnie uczniowie zastanawiają się, na co można byłoby przeznaczyć te pieniądze – np. bilet do kina raz w tygodniu, wycieczkę czy książki.

#### **2. Kawa na mieście**

- Uczniowie sprawdzają ceny kawy w kawiarniach czy na stacjach benzynowych.
- Zakładamy, że ktoś codziennie kupuje kawę zamiast przygotować ją w domu.
- Obliczamy koszty miesięczne i roczne, a następnie porównujemy je z ceną ekspresu i kawy w domu.

#### **3. Energia w domu – czas spędzony przed telewizorem i innymi urządzeniami**

- Obliczamy, ile prądu zużywają różne urządzenia (np. komputer, konsola, telewizor).
- Uczniowie sprawdzają ceny energii elektrycznej i obliczają, ile kosztuje korzystanie z tych sprzętów przez dzień, miesiąc i rok.
- Rozmawiamy o tym, jak nadmierny czas spędzany przed ekranami wpływa na zdrowie – ogranicza aktywność fizyczną, pogarsza jakość snu i relacje społeczne.

- Zastanawiamy się, jak można oszczędzać energię i pieniądze, a następnie proponujemy, aby zaoszczędzone środki przeznaczyć na coś wspierającego zdrowie (np. zdrową przekąskę, wyjście na basen, wycieczkę rowerową).

#### 4. Fast food kontra zdrowy obiad

- Porównujemy cenę przykładowego zestawu z popularnych sieci serwujących jedzenie typu fast food (np. McDonald's czy KFC) z kosztem przygotowania domowego posiłku.
- Obliczamy, ile wydaje osoba, która je codziennie w tego typu lokalu w miesiącu i roku.
- Uczniowie tworzą plakaty porównujące oba style odżywiania.

#### 5. Telefon i Internet

- Uczniowie porównują różne oferty abonamentów i kart prepaid.
- Obliczają, ile można zaoszczędzić, wybierając tańszą opcję w skali roku.
- Mogą też zaproponować, co zrobić z zaoszczędzoną kwotą.

#### 6. Podróże i kultura zamiast używek

- Obliczamy, ile kosztowałby wyjazd lub oferta kulturalna (np. weekend w górach, jedno wyjście tygodniowo do kina lub na koncert – średnio cztery w miesiącu), a ile w tym czasie wydałby palacz lub osoba podjadająca słodycze.
- Uczniowie tworzą porównawcze plakaty: „wyjazd” lub „kultura” kontra „używki”.

## MATEMATYKA DLA ZDROWIA – CIEKAWÉ DANE

Choć matematyka nie leczy i nie diagnozuje, dostarcza narzędzi potrzebnych do analizy, podejmowania decyzji i rozumienia ryzyka. Dzięki matematyce możemy:

- ocenić, czy dana dieta jest zbilansowana (liczenie kalorii, proporcji makroskładników),
- zrozumieć, jak działają leki (obliczanie dawek w farmakologii),
- analizować dane statystyczne (np. ryzyko chorób),
- interpretować wyniki badań, wykresy i tabele medyczne.

Uczniowie, którzy potrafią analizować dane, są bardziej odporni na dezinformację. Dzięki umiejętności interpretacji statystyk łatwiej wychwytyją fake newsy w mediach społecznościowych dotyczące zdrowia. Matematyka staje się tu nie tylko nauką o liczbach, lecz także narzędziem krytycznego myślenia w codziennym życiu.

Dlatego warto przytoczyć ciekawostki i dane, które zaskoczą uczniów, takie jak:

- **Statystyki dotyczące snu** – np. że uczniowie w wieku 15-17 lat średnio śpią mniej niż 7 godzin na dobę, podczas gdy zalecana liczba godzin snu to 8-10 godzin<sup>2</sup>.
- **Wpływ aktywności fizycznej na zdrowie** – dane pokazujące, że regularny ruch obniża ryzyko wielu chorób przewlekłych nawet o kilkadziesiąt procent<sup>3</sup>.
- **Zaskakujące fakty o diecie** – np. że przeciętny nastolatek spożywa więcej cukru niż zalecana dzienna norma, co można łatwo przedstawić w formie wykresów i diagramów<sup>4</sup>.
- **Napoje energetyczne** – przeciętny napój typu „energy drink” zawiera około 12 łyżeczek cukru (ok. 55 g), podczas gdy WHO zaleca nie przekraczać 6 łyżeczek cukru dziennie u dzieci<sup>5</sup>.

<sup>2</sup> „Nastolatki coraz krócej śpią”, Nauka w Polsce, 2025, <https://scienceinpoland.pl/aktualnosci/news%2C403941%2Cnastolatki-coraz-krocej-spia.html> [dostęp: 10.09.2025]

<sup>3</sup> „Wpływ regularnej aktywności fizycznej na zdrowie”, ProfiBaza, [https://profibaza.pzh.gov.pl/wplyw\\_regulanej\\_aktynwosci\\_fizycznej\\_na\\_zdrowie](https://profibaza.pzh.gov.pl/wplyw_regulanej_aktynwosci_fizycznej_na_zdrowie) [dostęp: 10.09.2025]; „Aktywność fizyczna”, Rzecznik Praw Pacjenta, <https://www.gov.pl/web/rpp/aktywnosc-fizyczna> [dostęp: 10.09.2025]

<sup>4</sup> „O dziewięć łyżeczek za daleko. Czy wiesz, ile cukru je twoje dziecko?”, 2023, <https://planujedlugiezycie.pl/aktualnosci/o-dziewiec-lyzeczek-za-daleko-czy-wiesz-ile-cukru-je-twoje-dziecko/> [dostęp: 10.09.2025]; „Dzieci w Polsce zjadają 19 łyżeczek cukru dziennie”, <https://www.gov.pl/web/psse-staszow/dzieci-w-polsce-zjadaja-19-lyzeczek-cukru-dziennie> [dostęp: 10.09.2025]

<sup>5</sup> „Healthy diet”, WHO, 2020, <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/healthy-diet> [dostęp: 10.09.2025]; „Rethink Your Child's Sugary Drinks”, 2017, <https://simonsaysssmile.ca/simon-pong-dentistry/sugary-drinks/> [dostęp: 10.09.2025]

- Warto przy okazji zapoznać uczniów ze składem energetyków i ich wpływem na zdrowie<sup>6</sup>.
- **Aktywność ruchowa polskiej młodzieży:** W Polsce tylko 20% nastolatków w wieku 11-15 lat, w tym 24% chłopców i 16% dziewcząt spełnia zalecenia WHO dotyczące min. 60-minutowej codziennej aktywności fizycznej<sup>7</sup>.

Przykłady danych i ciekawostek wplecione w zadania praktyczne nie tylko przyciągają uwagę, ale pokazują, jak w codziennym życiu można analizować i weryfikować informacje, zwłaszcza w świecie, w którym uczniowie są bombardowani sprzecznymi danymi o zdrowiu – dietami cud, suplementami, czy 5-minutowymi treningami, które rzekomo pozwalają na szybkie schudnięcie czy wyrzeźbienie sylwetki.

Takie podejście staje się cichym sprzymierzeńcem rozwoju krytycznego myślenia i kształtowania odpowiedzialnych nawyków zdrowotnych, a jednocześnie pokazuje praktyczne zastosowanie umiejętności analitycznych w codziennym życiu.

## MATEMATYKA W SŁUŻBIE ZDROWEGO STYLU ŻYCIA – ESCAPE ROOM

Fantastycznie można łączyć naukę matematyki z kształtowaniem postaw prozdrowotnych, wykorzystując formę **escape roomu edukacyjnego**. W tej zabawnej i angażującej formule uczniowie rozwiązują zagadki matematyczne, które jednocześnie uczą ich, jak dbać o zdrowie.

Zagadki mogą dotyczyć m.in.:

- **Obliczania BMI** – uczniowie przeliczają wskaźnik masy ciała, analizując własne lub przykładowe dane, co pomaga zrozumieć znaczenie prawidłowej wagi.
- **Procentowego udziału składników odżywczych** – zadania wymagają wyliczenia proporcji białek, tłuszczów i węglowodanów w posiłkach, co rozwija świadomość zbilansowanej diety.
- **Spalania kalorii podczas aktywności fizycznej** – uczniowie obliczają, ile kalorii spali osoba spacerująca, biegająca czy jeżdżąca na rowerze, co pozwala połączyć matematykę z aktywnością fizyczną.

Każde poprawne rozwiązanie przybliża uczniów do „odblokowania sejfu”, w którym czeka nagroda – może to być symboliczny dyplom, naklejka czy punktacja do klasyfikacji grupowej.

Dzięki takiemu podejściu uczniowie nie tylko praktycznie wykorzystują umiejętności matematyczne, takie jak procenty, proporcje, działania na liczbach czy jednostkach czasu, ale również zdobywają wiedzę o **zdrowym stylu życia**: o znaczeniu zbilansowanej diety, regularnej aktywności fizycznej, nawodnienia czy higieny codziennej.

Escape room edukacyjny staje się więc nie tylko formą nauki przez zabawę, ale także skutecznym narzędziem kształtowania postaw prozdrowotnych. Łączy **logiczne myślenie, pracę zespołową i praktykę prozdrowotną**, co sprawia, że lekcje matematyki stają się ciekawsze, bardziej interaktywne i praktyczne.

Poniżej znajduje się przykład takiej gry edukacyjnej pod nazwą „SEJF Z LEKAMI RATUJĄCYMI ŻYCIE”.

<sup>6</sup> Możemy wykorzystać np. prezentację pt. „Napoje energetyzujące” opracowaną przez Oddział Higieny Żywności i Żywnienia Wojewódzkiej Stacji Sanitarno-Epidemiologicznej w Rzeszowie: <https://www.gov.pl/attachment/75649cff-3620-466a-af3a-3ad2e8bd16bf> [dostęp: 10.09.2025]

<sup>7</sup> „Nowy raport Biura Regionalnego WHO dla Europy (WHO/Europe) podkreślający społeczno-ekonomiczne różnice w zdrowiu młodzieży”, 2024, Nowy raport Biura Regionalnego WHO dla Europy (WHO/Europe) podkreślający społeczno-ekonomiczne różnice w zdrowiu młodzieży - Standardy Medyczne, [dostęp: 10.09.2025]; Pełny raport dostępny jest tutaj: <https://iris.who.int/handle/10665/376772> [dostęp: 10.09.2025]

## Cel gry:

Celem gry jest rozwijanie umiejętności matematycznych uczniów poprzez praktyczne zastosowanie wiedzy w kontekście zdrowia i codziennych nawyków. Gra wspiera także współpracę w grupie, logiczne myślenie i podejmowanie decyzji, a jednocześnie wzmacnia świadomość prozdrowotną zgodnie z zapisami podstawy programowej.



## Założenia:

- Gra trwa ok. 45-60 minut i przeznaczona jest do pracy w małych grupach (2-4 osoby).
- Uczniowie rozwiązują kolejne zadania matematyczne powiązane z tematyką zdrowego stylu życia (m.in. odżywianie, aktywność fizyczna, czas ekranowy, profilaktyka zdrowotna).
- Każde zadanie prowadzi do uzyskania jednej cyfry szyfru potrzebnego do otwarcia sejfu. Zadania wymagają obliczeń z różnych działów matematyki na poziomie szkoły podstawowej: działań na liczbach, procentów, jednostek miary, prostych obliczeń czasowych.
- Kluczową rolę odgrywa współpraca i komunikacja w zespole – tylko wspólne rozwiązywanie wszystkich zadań prowadzi do sukcesu.

## Efekty edukacyjne:

- Uczniowie utrwalają i praktycznie wykorzystują umiejętności matematyczne.
- Uczniowie rozwijają kompetencje kluczowe: logiczne i krytyczne myślenie, rozwiązywanie problemów, współpracę w grupie.
- Uczniowie poszerzają wiedzę na temat zdrowego stylu życia, nawyków żywieniowych, aktywności fizycznej i profilaktyki.
- Uczniowie otrzymują odpowiedź na pytanie „Po co mi ta matematyka?” – widzą jej zastosowanie w realnych sytuacjach życiowych.

Poniżej zawarte są odpowiedzi do każdego zadania. Materiały dla uczniów (karta pracy) znajdują się w **Załączniku 1**.

## Rozwiązania:

### Zadanie 1: Cukry w napojach

#### Obliczenia:

- Sok:  $200 \text{ ml} \times 8 \text{ g} \div 100 \text{ ml} = 16 \text{ g}$
- Cola:  $330 \text{ ml} \times 10 \text{ g} \div 100 \text{ ml} = 33 \text{ g}$
- Napój energetyczny:  $250 \text{ ml} \times 12 \text{ g} \div 100 \text{ ml} = 30 \text{ g}$
- Suma:  $16 \text{ g} + 33 \text{ g} + 30 \text{ g} = 79 \text{ g}$
- Limit dzienny:  $25 \text{ g}$
- Przekroczenie:  $79 \text{ g} - 25 \text{ g} = 54 \text{ g}$

Kod 1: 54

### Zadanie 2 – Procentowy udział składników odżywczych

#### Obliczenia:

- Białko:  $15 \div 55 \times 100 \approx 27\%$
- Tłuszcze:  $10 \div 55 \times 100 \approx 18\%$

- Węglowodany:  $30 \div 55 \times 100 \approx 55\%$

Kod 2: 27

### **Zadanie 3 – Spalanie kalorii**

Obliczenia:

- 7 dni:  $160 \times 7 = 1120$  kcal
- 30 dni:  $160 \times 30 = 4800$  kcal

Kod 3: 0

### **Zadanie 4 – Woda**

Obliczenia:

- Tydzień:  $1,5 \times 7 = 10,5$  L
- Rok:  $1,5 \times 365 = 547,5$  L  $\rightarrow$  54 pełne dziesiątki

Kod 4: 54

### **Zadanie 5 – Ograniczenie czasu ekranowego**

Obliczenia:

- $4,5 - 2 = 2,5$  h dziennie
- $2,5 \times 30 = 75$  h
- $75 \times 12 = 900$  h

Kod: 75

Odblokowanie sejfu:

- Kolejność kodów: **54 – 27 – 0 – 54 – 75**
- Po wpisaniu kodów uczniowie odblokowują nagrodę (np. dyplom, naklejki, punktację grupową).

**Uwagi:**

- Zadania można wprowadzić **na kartach, tablicach lub kartach z kodami**, aby uczniowie mogli je rozwiązywać w formie fizycznej lub cyfrowej.
- Escape Room łączy **umiejętności matematyczne** (procenty, proporcje, jednostki, dodawanie i odejmowanie) z **praktyką prozdrowotną**: cukier w diecie, składniki odżywcze, nawodnienie, ograniczenie czasu ekranowego.
- Zadania rozwijają także **pracę zespołową, logiczne myślenie i umiejętność planowania**.

## **PROJEKTY INTERDYSCYPLINARNE**

Interdyscyplinarność w edukacji to podejście, które łączy treści i umiejętności z różnych dziedzin, co sprawia, że nauka staje się bardziej praktyczna i angażująca.

Projekty interdyscyplinarne zwiększają motywację do nauki oraz rozwijają kreatywność, umiejętności pracy zespołowej, komunikacji i krytycznego myślenia. Ponadto pozwalają uczniom dostrzec praktyczne zastosowania matematyki, na przykład w obliczaniu wartości odżywczych czy analizie statystyk związanych ze zdrowiem i profilaktyką. Takie podejście sprzyja holistycznemu rozwojowi uczniów, indywidualizacji nauczania oraz lepszemu przygotowaniu do wyzwań życia codziennego i dalszej edukacji.

Przykładem może być analiza składu produktów spożywczych, liczenie wartości odżywczych czy przygotowywanie statystyk na temat zdrowego trybu życia.

Poniżej przedstawiam kilka pomysłów na projekty interdyscyplinarne.

## 1. ZDROWIE W LICZBACH

Opis projektu:

Uczniowie przez określony czas (np. tydzień) zbierają dane związane ze swoim trybem życia, takie jak:

- liczba godzin snu,
- czas poświęcony na aktywność fizyczną,
- ilość spożywanych warzyw i owoców,
- liczba wypitych szklanek wody dziennie,
- czas spędzony przed ekranem (smartfon, komputer, telewizor),
- ilość spożywanych słodczy lub przekąsek dziennie,
- liczba godzin spędzonych na świeżym powietrzu,
- częstotliwość mycia rąk lub higieny osobistej (w formie liczbowej np. x razy na dzień),
- liczba spożywanych posiłków w ciągu dnia,
- ilość czasu przeznaczonego na relaks lub medytację.

Po zebraniu informacji uczniowie opracowują je w ramach zajęć matematyki:

- obliczają średnie (w szkole ponadpodstawowej – medianę i dominantę),
- tworzą tabele i różnorodne wykresy (słupkowe, kołowe, liniowe),
- porównują dane pomiędzy grupami lub klasami,
- interpretują wyniki i formułują wnioski dotyczące wpływu codziennych nawyków na zdrowie.

Efektem końcowym może być:

- szkolna prezentacja z wykresami i analizami,
- gazetka edukacyjna lub plakat w klasie,
- dyskusja porównująca realne zachowania uczniów z zaleceniami WHO dotyczącymi zdrowego trybu życia.

## 2. TYDZIEŃ AKTYWNOŚCI FIZYCZNEJ – Z MATEMATYKĄ W TLE

Opis projektu:

W czasie tygodnia uczniowie noszą krokomierze lub używają aplikacji mobilnych. Zebrane dane analizowane są na lekcjach matematyki (wykresy słupkowe, liniowe, porównania klas, szacowanie spalonych kalorii).

Efektem końcowym może być:

- szkolna prezentacja z wykresami i analizami,
- gazetka edukacyjna lub plakat w klasie,
- dyskusja porównująca realne zachowania uczniów z zaleceniami WHO dotyczącymi zdrowego trybu życia.

## 3. MATEMATYKA NA ETYKIECIE

Opis projektu:

Uczniowie przynoszą opakowania produktów spożywczych (batony, napoje, płatki, chipsy, jogurty) i uczą się odczytywać wartości odżywcze z produktów spożywczych. Po zebraniu informacji uczniowie opracowują je w ramach lekcji matematyki, informatyki i plastyki.

Na lekcji matematyki uczniowie analizują etykiety (kcal, tłuszcze, węglowodany, cukry, sól, białko) i obliczają:

- kalorie w całym opakowaniu i w jednej porcji,

- procent dziennego zapotrzebowania,
- różnice między produktami (np. ile % więcej cukru ma produkt A niż produkt B).

Na lekcji informatyki tworzą wykresy słupkowe lub kołowe pokazujące np. zawartość cukru, tłuszczu, kalorii w danym produkcie, przygotowują infografikę lub mini-prezentację multimedialną.

Na lekcji plastyki projektują w grupach i wykonują plakaty promujące zdrowe odżywianie, wykorzystując wyniki swoich obliczeń.

#### 4. FARMACEUTA NA MEDAL

Opis projektu:

Gra edukacyjna, w której uczniowie wcielają się w rolę farmaceutów.

Uczniowie pracują w grupach (2-3 osoby) lub indywidualnie – decyzję podejmuje nauczyciel.

Każda grupa / Każdy gracz otrzymuje karty pacjenta z danymi: wiek, waga, choroba / dolegliwość, dawka leku (**Załącznik 2**).



Podczas rozgrywki uczniowie:

- obliczają odpowiednie dawki leków dla pacjentów, np.:  
Pacjent waży 40 kg. Dawka leku wynosi 5 mg/kg. Ile mg leku należy podać pacjentowi?  
Rozwiązanie:  $5 \text{ mg} \times 40 = 200 \text{ mg}$
- dokonują przeliczeń między różnymi jednostkami (np.  $\text{mg} \leftrightarrow \text{g}$ ,  $\text{ml} \leftrightarrow \text{l}$ ), np.:  
Lek dostępny jest w ampułkach po 0,25 g. Pacjent potrzebuje 500 mg. Ile ampułek leku należy podać pacjentowi?  
Rozwiązanie:  $0,25 \text{ g} = 250 \text{ mg}$ ;  $500 \text{ mg} \div 250 \text{ mg} = 2 \text{ ampułki}$
- planują harmonogram podawania leków, określając czas między dawkami, np.:  
Pacjent ma przyjmować lek co 8 godzin, pierwszą dawkę o 8:00. O której godzinie powinien przyjąć kolejne dawki?  
Rozwiązanie: 8:00 → 16:00 → 24:00 (następnego dnia 8:00)

**Proponowana punktacja:**

- Poprawna dawka: 2 punkty
- Poprawne przeliczenie jednostek: 2 punkty
- Poprawny harmonogram: 1 punkt za każdą dawkę
- Szybkość i poprawność reakcji: 1–3 punkty

Poniżej zawarte są odpowiedzi do każdego zadania. Materiały dla uczniów (karta pracy) znajdują się w **Załączniku 2**.

#### PACJENT 1

Obliczenia:

1.  $15 \text{ mg} \times 25 = 375 \text{ mg}$
2.  $375 \text{ mg} \div 125 \text{ mg}$  to 3 tabletki
3. 8:00 → 14:00 → 20:00 → 2:00 (następnego dnia)

**PACJENT 2**Obliczenia:

1.  $10 \text{ mg} \times 40 = 400 \text{ mg}$
2.  $400 \text{ mg} \div (100 \text{ mg}/5 \text{ ml}) = 20 \text{ ml}$
3. 8:00 → 16:00 → 24:00

**PACJENT 3**Obliczenia:

1.  $0,5 \text{ mg} \times 70 = 35 \text{ mg}$
2.  $35 \text{ mg} \div 10 \text{ mg}$  to 3,5 tabletki → podać 3 lub 4 w zależności od zaleceń lekarza
3. Codziennie o 8:00

**PACJENT 4**Obliczenia:

1.  $7 \text{ mg} \times 60 = 420 \text{ mg}$
2.  $420 \text{ mg} \div 100 \text{ mg/ml} = 4,2 \text{ ml}$
3. 8:00 → 20:00 → 8:00 (następnego dnia)

**PACJENT 5**Obliczenia:

1.  $20 \text{ mg} \times 18 = 360 \text{ mg}$
2.  $360 \text{ mg} \div (125 \text{ mg}/5 \text{ ml}) = 14,4 \text{ ml}$
3. 8:00 → 16:00 → 24:00

**5. RUCH I ZDROWIE — BADAMY, LICZYMY, WYCIĄGAMY WNIOSKI**

## Opis projektu:

Projekt przeznaczony jest dla uczniów szkoły podstawowej. Celem jest połączenie aktywności fizycznej z prostymi pomiarami matematycznymi i umiejętnością wyciągania wniosków z wyników pomiarów. Jest to lekcja na sali gimnastycznej lub w terenie, podczas której uczniowie przeprowadzają badania i dokonują poniższych pomiarów.

## Przebieg:

Uczniowie pracują w parach i wykonują pięć zadań ruchowych, zapisując wyniki w karcie pomiarów (**Załącznik 3**). Na każde zadanie przeznaczają się ok. 6-8 minut.

## Zadania pomiarowe:

1. Pomiar tętna spoczynkowego – odczyt przez 15 sekund i przeliczenie wyniku na *bpm* (liczba uderzeń serca na minutę).
2. Czas biegu na 30 m – pomiar stoperem.
3. Liczba przysiadów lub pompek w 30 sekund – zliczenie powtórzeń.
4. Ćwiczenia oddechowe – pomiar tętna przed i po ćwiczeniach.
5. Liczba skoków na skakance w 1 minutę – zliczenie powtórzeń.

## Efekty:

Uczniowie poznają sposób prowadzenia pomiarów, ćwiczą podstawowe obliczenia i interpretację danych, a także dostrzegają związek między aktywnością fizyczną a zdrowiem.



## 6. DEBATA UCZNIOWSKA „CZY POTRAFI MY ZARZĄDZAĆ SWOIM ZDROWIEM?”

Opis projektu:

Debata jest okazją do refleksji nad tym, jak młodzież dba o swoje zdrowie fizyczne i psychiczne. Wydarzenie łączy analizę danych liczbowych z dyskusją i wspólnym formułowaniem wniosków.

Przebieg:

Uczniowie analizują dane dotyczących snu, stresu i aktywności fizycznej, dostarczone przez nauczyciela lub samodzielnie zebrane (należy zwrócić uwagę uczniów na konieczność korzystania z wiarygodnych i aktualnych źródeł). Następnie uczniowie prezentują wyniki badań w formie tabel i wykresów. Dane te stają się podstawą do wspólnej dyskusji.

Elementy matematyczne:

1. Prezentacja danych – opracowanie tabel i wykresów (słupkowych, kołowych, liniowych) przedstawiających, np. średnią liczbę godzin snu, odsetek odczuwających stres, procent aktywnie uprawiających sport.
2. Analiza zależności – badanie korelacji, np. między snem a stresem, porównanie wpływu używek na samopoczucie.
3. Wizualizacja problemu – zestawienie grup (np. <6h, 6–8h, >8h snu) i różnic w poziomie stresu czy aktywności fizycznej.
4. Dyskusja oparta na liczbach – odpowiedzi na pytania typu: Czy większość uczniów śpi wystarczająco długo? Czy uczniowie uprawiający sport rzadziej odczuwają stres?
5. Wnioski i rekomendacje – podsumowanie wyników w formie wykresów i propozycje prostych metod monitorowania zdrowia (np. prowadzenie tabeli snu i stresu).

Efekty:

Uczniowie rozwijają umiejętność analizy danych, interpretacji zależności i formułowania wniosków, a także uczą się wykorzystywać matematykę w praktycznym kontekście zdrowia i stylu życia.

## KONKURSY DRUŻYNOWE JAKO INNOWACYJNE NARZĘDZIE DYDAKTYCZNE

Świetnym rozwiązaniem wspierającym integrację postaw prozdrowotnych z matematyką są konkursy drużynowe, które można dodatkowo wzbogacić o treści, np. z języka angielskiego. Dzięki temu rozwijamy kompetencje matematyczne, umiejętności językowe, zachowania prozdrowotne oraz pracę zespołową uczniów.

Przykładowe pomysły na konkursy:

### 1. Matematyczny Challenge Zdrowia

Drużyny rozwiązują zestaw zadań matematycznych opartych na danych zdrowotnych, np. obliczają liczbę kalorii, ilość cukru w napojach, analizują wykresy snu i aktywności fizycznej. Część zadań jest prezentowana w języku angielskim i część odpowiedzi również ma być udzielona w tym języku.

Przykładowe zadania:

- Oblicz, ile kalorii dostarcza posiłek składający się z dwóch jabłek, dwóch kromek chleba i szklanki mleka. Jedno jabłko dostarcza 95 kalorii, jedna kromka chleba 70 kalorii, a szklanka mleka – 120 kalorii. Udziel odpowiedzi w języku angielskim, np. „Ten posiłek dostarcza \_\_\_\_ kalorii”.
- Narysuj okrąg (to będzie twój talerz). Połowę pokoloruj na zielono (warzywa), jedną czwartą na brązowo (białko), a jedną czwartą na żółto (węglowodany).

- Przetłumacz zdanie na język angielski: „Mój talerz ma połowę warzyw, jedną czwartą białka i jedną czwartą węglowodanów”.

## 2. Infografika zdrowia – projekt interdyscyplinarny

Zadaniem drużyny jest przygotowanie plakatu lub cyfrowej infografiki przedstawiającej wybrane dane zdrowotne (np. średnią długość snu uczniów, spożycie cukru) z elementami matematycznymi (wykresy, diagramy). Prace można zaprezentować w formie wystawy klasowej lub online.

## 3. Zdrowa dieta pod lupą – budżet i proporcje

Uczniowie planują zdrowy jadłospis na tydzień dla nastolatka, analizując kaloryczność, proporcje składników odżywczych oraz koszt. Projekt wykonywany jest w grupach i przedstawiany komisji w formie zwięzłej prezentacji.

Ciekawym rozwiązaniem są konkursy obejmujące kilka etapów lub stacji, które tworzą dynamiczną i angażującą rywalizację drużynową. Tego typu inicjatywy można zorganizować w formie stacjonarnych zadań rozmieszczonych w sali lub różnych salach tematycznych, przez które zespoły rotacyjnie przechodzą w określonym czasie. Każda stacja może być związana z inną dziedziną, łącząc aspekty matematyki, zdrowia, języka angielskiego oraz umiejętności praktycznych i społecznych.

Przykładowe stacje:

- Stacja matematyczno-zdrowotna: Zadania rachunkowe na bazie danych o aktywności ruchowej, np. obliczanie kroków, kalorii, ilości wody.
- Stacja „Fuel Forward”: Gra ruchowa z kartami produktów, gdzie uczniowie przechodzą dalej, wykonując ruchowe zadania odpowiadające wartościom odżywczym<sup>8</sup>.
- Stacja językowa: Opisywanie zdrowych nawyków, produktów i czynności w języku angielskim (np. przygotowanie prostej prezentacji lub plakatu).
- Stacja kreatywna: Tworzenie plakatów lub infografik promujących zdrowe wybory żywieniowe i aktywność fizyczną na podstawie zdobytych informacji.
- Stacja ruchowa: Krótka sekwencja ćwiczeń, rozgrzewek albo quiz ruchowy.

Tak zorganizowany konkurs pozwala na współpracę w zespole, rozwija kompetencje przedmiotowe i społeczne oraz promuje zdrowy styl życia w atrakcyjnej formie.

## MATEMATYKA DLA ZDROWIA – PRZYKŁADY ZADAŃ DO WYKORZYSTANIA

W tej części artykułu zawarłam zestaw zadań matematycznych, które w naturalny sposób łączą naukę rachunków z tematyką zdrowego stylu życia. Każde zadanie zostało osadzone w kontekście bliskim uczniom – dotyczy m.in. zawartości cukru w napojach i słodyczach, ilości snu, zapotrzebowania kalorycznego, wskaźnika BMI czy codziennych wydatków. Dzięki temu uczniowie nie tylko wykonują obliczenia, wyliczają średnie arytmetyczne, proporcje czy procenty, lecz także uczą się analizować dane, wyciągać wnioski i podejmować świadome decyzje związane ze zdrowiem i finansami.

Poniżej zawarte są odpowiedzi do każdego zadania oraz komentarze i wskazówki. Materiały dla uczniów (karty pracy z zadaniami) znajdują się w **Załączniku 4**.

<sup>8</sup> Można posłużyć się wartościami z artykułu „Cukier w produktach spożywczych”, pacjent.gov.pl, Cukier w produktach spożywczych | Pacjent, [dostęp: 10.09.2025]

### Zadanie 1: Ilość cukru w soku

#### Obliczenia:

1. Obliczenie ilości cukru w 500 ml soku:  $\frac{12g}{100 ml} \times 500 ml = 60g \text{ cukru}$

2. Przeliczenie na łyżeczki:  $60g \div \frac{5g}{\text{łyżeczka}} = 12 \text{ łyżeczek cukru}$

3. Porównanie z normą WHO:

- Zalecenie WHO: 6 łyżeczek cukru dziennie
- Uczeń spożywa: 12 łyżeczek  $\rightarrow$  2 razy więcej niż zalecana dzienna norma

#### Wnioski:

Regularne picie półlitrowego kartonika soku może prowadzić do nadmiernego spożycia cukru.

Lepiej wybierać wodę, niesłodzone napoje lub soki rozcieńczone wodą.



#### Komentarz dla nauczyciela:

Nauczyciel może zachęcić uczniów do przeliczenia, ile cukru jest w napojach, które uczniowie piją na co dzień, aby obliczyć średnie spożycie cukru i porównać je z normami WHO. Takie zadanie rozwija umiejętności obliczeń, analizy danych i świadomego podejmowania decyzji dotyczących zdrowia.

### Zadanie 2: Średnia arytmetyczna – sen

#### Komentarz dla nauczyciela:

Średni czas snu uczniów w wieku 15-17 lat wynosi mniej niż 7 godzin, podczas gdy zalecana ilość snu to 8-10 godzin.

Nauczyciel może zaproponować, aby uczniowie sami zebrali dane dotyczące swojego snu w ciągu tygodnia. Dzięki temu zadanie staje się bardziej praktyczne, a uczniowie mają szansę zobaczyć realne wyniki i lepiej zrozumieć znaczenie odpowiedniego snu.



### Zadanie 3: Kalorie i makroskładniki

#### Obliczenia:

1. Kalorie z każdego makroskładnika:

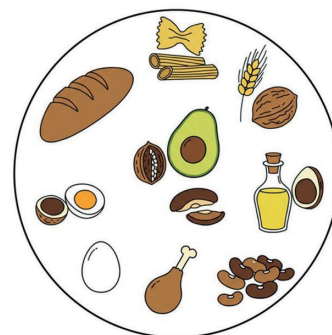
- Węglowodany:  $2500 \times 0,5 = 1250 \text{ kcal}$
- Tłuszcze:  $2500 \times 0,3 = 750 \text{ kcal}$
- Białko:  $2500 \times 0,2 = 500 \text{ kcal}$

2. Przeliczenie kalorii na gramy:

- Węglowodany:  $1250 \div 4 = 312,5 \text{ g}$
- Tłuszcze:  $750 \div 9 \approx 83,3 \text{ g}$
- Białko:  $500 \div 4 = 125 \text{ g}$

3. Tabela wyników:

| Mikroskładniki | Energia (kcal) | Masa (g) |
|----------------|----------------|----------|
| Węglowodany    | 1250           | 312,5    |
| Tłuszcze       | 750            | 83,3     |
| Białko         | 500            | 125      |
| Razem          | 2500           | -        |



#### Komentarz dla nauczyciela:

Warto w tym miejscu nadmienić, że wartość dziennego zapotrzebowania energetycznego jest kwestią

indywidualną, a co za tym idzie, zależy od kilku czynników, w tym od:

- masy ciała i wzrostu,
- płci,
- wieku,
- trybu pracy i stylu życia,
- rodzaju wykonywanej pracy (umysłowa czy fizyczna),
- poziomu aktywności fizycznej,
- ogólnego stanu zdrowia,
- celu dietetycznego (schudnięcie, utrzymanie wagi lub przyrost masy ciała).

#### Zadanie 4: Obliczanie BMI

Obliczenia:

##### A. BMI dorosłych

Pan Michał:  $BMI = \frac{85}{(1,80)^2} = \frac{85}{3,24} \approx 26,23$

Interpretacja wyniku: Pan Michał ma nadwagę.

Pani Karolina:  $BMI = \frac{62}{(1,65)^2} \approx \frac{62}{2,72} \approx 22,79$

Interpretacja wyniku: Pani Karolina ma prawidłową masę ciała.

Wniosek: Pani Karolina ma BMI bliższe wartości prawidłowej.

##### B. BMI dziecka/nastolatka

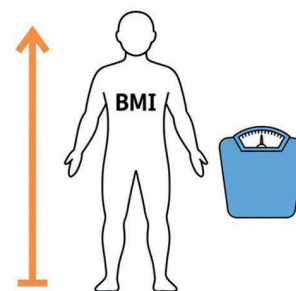
Ania:  $BMI = \frac{42}{(1,50)^2} = \frac{42}{2,25} \approx 18,67$

Interpretacja wyniku: Ania ma prawidłową masę ciała.

Bartek:  $BMI = \frac{48}{(1,60)^2} = \frac{48}{2,56} = 18,75$

Interpretacja wyniku: Bartek ma prawidłową masę ciała.

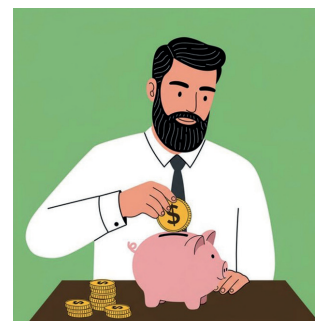
Wniosek: Bartek ma nieco wyższe BMI niż Ania, ale oboje mają prawidłową masę ciała.



#### Zadanie 5: Zgubne używki

Obliczenia:

1. Liczba paczek papierosów miesięcznie  
 $12 \text{ papierosów} \times 30 \text{ dni} = 360 \text{ papierosów}$   
 $1 \text{ paczka} = 20 \text{ papierosów}$   
 $360 \div 20 = 18 \text{ paczek miesięcznie}$
2. Miesięczne koszty palenia papierosów marki A, B i C  
 Marka A:  $18 \text{ paczek} \times 18 \text{ zł} = 324 \text{ zł}$   
 Marka B:  $18 \text{ paczek} \times 20 \text{ zł} = 360 \text{ zł}$   
 Marka C:  $18 \text{ paczek} \times 22 \text{ zł} = 396 \text{ zł}$
3. Roczny koszt palenia papierosów najdroższej marki  
 $12 \times 365 = 4380 \text{ papierosów}$   
 $4380 \div 20 = 219 \text{ paczek}$   
 $219 \times 22 \text{ zł} = 4818 \text{ zł rocznie}$



## Zadanie 6: Słodkie wydatki

### Rozwiązania:

#### 1. Dienne wartości:

- Ola: cukier – 49 g; koszt – 6,7 zł
- Paweł: cukier – 65 g; koszt – 7,6 zł

#### 2. Tygodniowe wartości:

- Ola: cukier – 343 g; koszt – 46,9 zł
- Paweł: cukier – 455 g; koszt – 53,2 zł
- Razem: cukier – 798 g; koszt – 100,1 zł
- Średnio na osobę (tydzień): cukier – 399 g; koszt – 50,05 zł

#### 3. Miesięczne wartości:

- Ola: cukier – 1470 g; koszt – 201 zł
- Paweł: cukier – 1950 g; koszt – 228 zł
- Razem: cukier – 3420 g (3,42 kg); koszt – 429 zł
- Średnio na osobę (miesiąc): cukier – 1710 g; koszt – 214,5 zł



### Podsumowanie:

| Osoba | Cukier dziennie (g) | Koszt dziennie (zł) | Cukier w tygodniu (g) | Koszt w tygodniu (zł) | Cukier w miesiącu (g) | Koszt w miesiącu (zł) |
|-------|---------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ola   | 49                  | 6,7                 | 343                   | 46,9                  | 1470                  | 201                   |
| Paweł | 65                  | 7,6                 | 455                   | 53,2                  | 1950                  | 228                   |

Wariant oszczędności: co drugi dzień

Tydzień (4 dni spożycia):

Razem cukier – 456 g (oszczędność vs codziennie – 342 g).

Razem koszt – 57,2 zł (oszczędność – 42,9 zł).

Miesiąc (15 dni spożycia):

Razem cukier – 1710 g (oszczędność – 1710 g).

Razem koszt – 214,5 zł (oszczędność – 214,5 zł).

## Zadanie 7: Kawa na mieście

### Obliczenia:

#### 1. Koszt tygodniowy

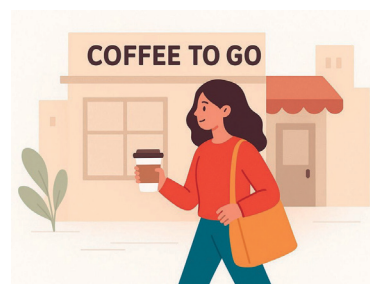
- cena jednej kawy = 9,90 zł
- liczba kaw w tygodniu = 4
- $4 \times 9,90 = 39,60$  zł
- koszt tygodniowy = 39,60 zł

#### 2. Koszt miesięczny (4 tygodnie)

- $39,60 \times 4 = 158,40$  zł
- koszt miesięczny = 158,40 zł

#### 3. Koszt roczny (10 miesięcy)

- $158,40 \text{ zł} \times 10 = 1584$  zł
- koszt roczny = 1584 zł



## Zadanie 8: Czas spędzany przed komputerem i innymi urządzeniami

### Obliczenia:

1. Czas miesięczny
  - Telefon:  $3 \text{ godziny/dzień} \times 30 \text{ dni} = 90 \text{ godzin/miesiąc}$
  - Komputer:  $1,5 \text{ godziny/dzień} \times 30 \text{ dni} = 45 \text{ godzin/miesiąc}$
  - Łącznie:  $90 + 45 = 135 \text{ godzin/miesiąc}$
2. Czas roczny
  - Telefon:  $90 \text{ godzin} \times 12 \text{ miesięcy} = 1080 \text{ godzin}$
  - Komputer:  $45 \text{ godzin} \times 12 \text{ miesięcy} = 540 \text{ godzin}$
  - Łącznie:  $1080 + 540 = 1620 \text{ godzin/rok}$
3. Przeliczenie na dni
  - $1 \text{ doba} = 24 \text{ godziny}$
  - $1620 \div 24 \approx 67,5 \text{ dnia}$



Michał spędza około 67,5 dnia w roku na nieproduktywnym korzystaniu z telefonu i komputera.

### Tabela miesięcznego i rocznego czasu

| Urządzenie | Czas dzienny (godziny) | Czas miesięczny (30 dni) | Czas roczny (12 miesięcy) |
|------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Telefon    | 3                      | 90                       | 1080                      |
| Komputer   | 1,5                    | 45                       | 540                       |
| Razem      | 4,5                    | 135                      | 1620                      |

### Wnioski:

Michał mógłby przeznaczyć te **67,5 dnia rocznie** na naukę, hobby, sport lub rozwijanie nowych umiejętności.

Nawet zmniejszenie czasu nieproduktywnego o połowę pozwoliłoby mu zaoszczędzić **33,75 dnia w roku** na produktywne czynności.

## Zadanie 9: Telefon i internet

### Obliczenia:

#### Plan A

- $60 \text{ zł} \times 12 = 720 \text{ zł}$
- koszt roczny = 720 zł

#### Plan B

- styczeń: 12 GB – 45 zł; luty: 18 GB – 55 zł; marzec: 28 GB – 75 zł; kwiecień: 8 GB – 45 zł; maj: 22 GB – 65 zł; czerwiec: 35 GB – 85 zł; lipiec: 60 GB – 135 zł; sierpień: 45 GB – 105 zł; wrzesień: 15 GB – 45 zł; październik: 10 GB – 45 zł; listopad: 20 GB – 55 zł; grudzień: 25 GB – 65 zł
- suma roczna = 820 zł

#### Plan C

- $600 \text{ zł} + 50 \text{ zł} = 650 \text{ zł}$
- koszt roczny = 650 zł



**Tabela: Porównanie ofert**

| Plan               | Koszt roczny | Wnioski / Uwagi                               |
|--------------------|--------------|-----------------------------------------------|
| A (abonament)      | 720 zł       | Stała opłata, 30 GB miesięcznie               |
| B (prepaid)        | 820 zł       | Droższy z powodu dopłat za paczki danych      |
| C (roczny prepaid) | 650 zł       | Najtańszy, nielimitowany Internet + aktywacja |

Najtańszy jest **Plan C – roczny prepaid (650 zł)**.

Oszczędności: **70 zł względem Planu A, 170 zł względem Planu B.**

Zaoszczędzoną kwotę można przeznaczyć np. na książki, słuchawki, kino lub odłożyć na wakacje.

### **Podsumowanie**

Wierzę, że matematyka może wyjść poza ramy tradycyjnych lekcji i stać się mostem łączącym wiedzę z troską o człowieka. To przestrzeń, w której liczby spotykają się z realnym życiem, a uczniowie uczą się nie tylko liczyć, ale myśleć krytycznie, podejmować świadome decyzje i budować zdrowe nawyki. Dlatego warto zaryzykować i przekroczyć granice „przedmiotu”. Zagadnienia związane ze zdrowiem wzbogacone aparatem matematycznym stają się interdyscyplinarne i uświadamiają potrzebę zmiany dotychczasowego trybu życia w sposób bardziej efektywny niż znane wszystkim „suche” zalecenia medyczne. Między liczbami a dobrym samopoczuciem rodzi się świadomość, odpowiedzialność i pasja do poznawania świata. Niech każdy nauczyciel stanie się przewodnikiem w tej podróży, a uczniowie odkrywają, że nauka może inspirować, zmieniać życie i otwierać nowe perspektywy.

## Załącznik 1: ESCAPE ROOM – „SEJF Z LEKAMI RATUJĄCYMI ŻYCIE”

5

**Czas gry:** 45-60 minut

**Forma:** praca w grupach (2-4 osoby)

**Fabula:** Podczas wycieczki do Centrum Zdrowego Stylu Życia odkryliście zamknięty sejf z lekami ratującymi życie – m.in. leki na reakcje alergiczne po ugryzieniu owadów (np. osy). Pacjent potrzebuje pomocy! Sejf chroniony jest szyfrem z pięciu cyfr. Każde poprawnie rozwiązane zadanie daje Wam jedną cyfrę szyfru.



### Instrukcje dla uczniów:

1. Rozwiązujcie wszystkie zadania w kolejności.
2. Każde zadanie daje Wam jedną cyfrę szyfru.
3. Po wpisaniu wszystkich kodów w odpowiedniej kolejności odblokowujecie sejf.

### Zadanie 1: Cukry w napojach

#### Treść:

Na stoliku przy łóżku pacjenta stoją trzy butelki z napojami: sokiem pomarańczowym, colą oraz napojem energetycznym. Waszym zadaniem jest obliczenie, ile cukru znajduje się łącznie w tych napojach. Maksymalny dzienny limit cukru to 25 g.

Zawartość cukru w 100 ml napoju przedstawia poniższa tabela.

| Napój              | Ilość  | Cukier/100 ml |
|--------------------|--------|---------------|
| Sok pomarańczowy   | 200 ml | 8 g           |
| Cola               | 330 ml | 10 g          |
| Napój energetyczny | 250 ml | 12            |

1. Obliczcie, ile gramów cukru znajduje się w każdej butelce napoju.
2. Obliczcie, ile gramów cukru łącznie spożyje pacjent, jeśli wypije wszystkie trzy napoje.
3. Obliczcie, o ile gramów cukru pacjent przekroczy dzienny limit 25 g.

**Kod do sejfu:** Liczba gramów cukru, o którą przekroczone limit (jeśli nie przekroczone → 0)

#### Obliczenia:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

**Rozwiązanie – kod 1:** \_\_\_\_\_

### Zadanie 2 – Procentowy udział składników odżywczych

#### Treść:

Całkowita masa kanapki z serem to 55g. Kanapka zawiera białko, tłuszcze i węglowodany w następującej ilości:

1. Białko: 15 g
2. Tłuszcze: 10 g
3. Węglowodany: 30 g

Obliczcie procentowy udział każdego składnika w całkowitej masie.

**Kod do sejfu:** procent białka

**Obliczenia:**

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

**Rozwiązanie – kod 2:** \_\_\_\_\_**Zadanie 3 – Spalanie kalorii****Treść:**

Tomek spaceruje 40 minut dziennie, spalając 160 kcal.

1. Ile kalorii spali Tomek w ciągu 7 dni?
2. Ile kalorii spali Tomek w ciągu miesiąca (30 dni)?

**Kod do sejf:** ostatnia cyfra liczby kalorii w miesiącu**Obliczenia:**

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_

**Rozwiązanie – kod 3:** \_\_\_\_\_**Zadanie 4 – Woda****Treść:**

Marcin wie, że każdy uczeń powinien wypijać co najmniej 1,5 litra wody dziennie.

Sumiennie trzyma się tego zalecenia.

Oblicz:

1. Ile litrów wody Marcin wypije w ciągu tygodnia?
2. Ile litrów wody wypije w ciągu roku (365 dni)?

**Kod do sejf:** liczba pełnych dziesiątek litrów w ciągu roku**Obliczenia:**

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_

**Rozwiązanie – kod 4:** \_\_\_\_\_**Zadanie 5 – Ograniczenie czasu ekranowego****Treść:**

Damian spędza 4,5 godziny dziennie, grając w gry na komputerze i przeglądając media społecznościowe na telefonie. W efekcie cierpią na tym jego wyniki w szkole, ponieważ za mało czasu poświęca na naukę. Damian chce ograniczyć czas poświęcony mediom do 2 godzin dziennie.

1. Ile godzin dziennie zaoszczędzi Damian?
2. Ile godzin w miesiącu (średnio 30 dni) zaoszczędzi Damian?
3. Ile godzin w ciągu roku (12 miesięcy) zaoszczędzi Damian?

**Kod do sejf:** liczba godzin zaoszczędzonych w miesiącu**Obliczenia:**

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

**Rozwiązanie – kod 5:** \_\_\_\_\_**Odblokowanie sejf – kolejność kodów 1–5:** \_\_\_\_\_

## Załącznik 2: FARMACEUTA NA MEDAL

5

|                                                |                                                              |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| KARTA PACJENTA 1<br>Wiek: 8 lat<br>Waga: 25 kg | Choroba / dolegliwość: Gorączka<br>Lek: A<br>Dawka: 15 mg/kg |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|



Zgodnie z ulotką dołączoną do leku dzieciom do lat 12 należy podawać 15 mg na każdy kilogram masy ciała, natomiast dzieciom powyżej 12 r.ż. i dorosłym 20 mg. Tabletki dostępne są w dawce 125 mg każda. Lek należy podawać co 6 godzin, zaczynając od godziny 8:00 rano.

### Zadania:

1. Oblicz, ile miligramów leku PACJENT 1 powinien otrzymać w jednej dawce.  
\_\_\_\_\_
2. Przelicz tę dawkę na liczbę tabletek po 125 mg.  
\_\_\_\_\_
3. Ułóż harmonogram podawania leku w ciągu doby, zaczynając od godziny 8:00.  
\_\_\_\_\_

|                                                 |                                                                |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| KARTA PACJENTA 2<br>Wiek: 14 lat<br>Waga: 40 kg | Choroba / dolegliwość: Ból gardła<br>Lek: B<br>Dawka: 10 mg/kg |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|

Zgodnie z ulotką dołączoną do leku dzieciom do lat 12 należy podawać 8 mg na każdy kilogram masy ciała, natomiast dzieciom powyżej 12 r.ż. i dorosłym 10 mg. Preparat dostępny jest w postaci syropu: 100 mg w 5 ml roztworu. Lek trzeba podawać co 8 godzin.

### Zadania:

1. Oblicz, ile miligramów leku powinien otrzymać PACJENT 2 w jednej dawce.  
\_\_\_\_\_
2. Przelicz tę dawkę na mililitry syropu.  
\_\_\_\_\_
3. Ułóż harmonogram podawania leku w ciągu doby, zaczynając od godziny 8:00.  
\_\_\_\_\_

|                                                 |                                                                   |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| KARTA PACJENTA 3<br>Wiek: 65 lat<br>Waga: 70 kg | Choroba / dolegliwość: Nadciśnienie<br>Lek: C<br>Dawka: 0,5 mg/kg |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|

Lek C należy podawać w dawce 0,5 mg na każdy kilogram masy ciała. Nie wolno podawać leku dzieciom poniżej 12 r.ż. Tabletki dostępne są po 10 mg. Lek przyjmowany jest raz na dobę (co 24 godziny).

### Zadania:

1. Oblicz, ile miligramów leku powinien otrzymać PACJENT 3 w jednej dawce.  
\_\_\_\_\_

2. Przelicz tę dawkę na liczbę tabletek po 10 mg. (Zwróć uwagę, że wynik może nie być liczbą całkowitą – w praktyce dawkę ustala lekarz).

3. Podaj godzinę przyjęcia kolejnej dawki leku, jeśli pacjent rozpoczyna terapię o 8:00 rano.

|                  |                                   |
|------------------|-----------------------------------|
| KARTA PACJENTA 4 | Choroba / dolegliwość: Ból mięśni |
| Wiek: 30 lat     | Lek: D                            |
| Waga: 60 kg      | Dawka: 7 mg/kg                    |

Lek D należy podawać dzieciom w wieku 7-12 lat w dawce 4 mg na każdy kilogram masy ciała, natomiast dzieciom powyżej 12 r.ż. i dorosłym w dawce 7 mg na każdy kilogram masy ciała. Preparat dostępny jest w ampułkach: 100 mg w 1 ml. Lek należy podawać co 12 godzin.

**Zadania:**

1. Oblicz, ile miligramów leku powinien otrzymać PACJENT 4 w jednej dawce.

2. Przelicz tę dawkę na mililitry roztworu.

3. Ułóż harmonogram podawania leku w ciągu doby, zaczynając od godziny 8:00.

|                  |                                      |
|------------------|--------------------------------------|
| KARTA PACJENTA 5 | Choroba / dolegliwość: Infekcja ucha |
| Wiek: 4 lata     | Lek: E                               |
| Waga: 18 kg      | Dawka: 20 mg/kg                      |

Lek E należy podawać dzieciom do 12 r.ż. w dawce 20 mg na każdy kilogram masy ciała, natomiast dorosłym w dawce 25 mg. Preparat dostępny jest w syropie: 125 mg w 5 ml. Lek podaje się co 8 godzin.

**Zadania:**

1. Oblicz, ile miligramów leku powinien otrzymać pacjent w jednej dawce.

2. Przelicz tę dawkę na mililitry syropu.

3. Ułóż harmonogram podawania leku w ciągu doby, zaczynając od godziny 8:00.

---

---

---

---

---



## Załącznik 3: RUCH I ZDROWIE – KARTA POMIARÓW

5

### Zadanie 1: Tętno spoczynkowe (*bpm*)

**Cel:** Pomiar tętna serca w spoczynku.

**Potrzebny sprzęt:** stoper, długopis



#### Instrukcja krok po kroku:

1. Usiądź spokojnie na 2 minuty.
2. Połóż palec wskazujący i środkowy na nadgarstku lub szyi, aby wyczuć puls.
3. Policz liczbę uderzeń przez 15 sekund.
4. Pomnóż wynik przez 4, aby uzyskać tętno w uderzeniach na minutę (*bpm*).
5. Powtórz pomiar i oblicz średnią.

#### Tabela wyników:

| Uczeń 1: (imię) _____ | Wynik 15 s | Wynik BPM |
|-----------------------|------------|-----------|
| Próba 1               |            |           |
| Próba 2               |            |           |
| Średnia               |            |           |

| Uczeń : (imię) _____ | Wynik 15 s | Wynik BPM |
|----------------------|------------|-----------|
| Próba 1              |            |           |
| Próba 2              |            |           |
| Średnia              |            |           |

### Zadanie 2: Bieg na 30 m

**Cel:** Pomiar czasu biegu na krótkim dystansie.

**Potrzebny sprzęt:** taśma miernicza 30 m, stoper, pachołki

#### Instrukcja krok po kroku (praca w parach):

1. Wyznaczcie start i metę biegu, używając pachołków.
2. Najpierw trzykrotnie biegnie jeden/jedna z was, drugi/druga mierzy czas.
3. Biegnij najszybciej, jak potrafisz, do mety.
4. Powtórz bieg jeszcze dwa razy. Zapisz wyniki i oblicz średnią oraz zapisz najlepszy czas.
5. Na koniec znajdźcie najlepszy wynik.

| Tabela wyników:      | Próba 1 | Próba 2 | Próba 3 | Średnia | Najlepszy czas |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|----------------|
| Uczeń 1 (imię) _____ |         |         |         |         |                |
| Uczeń 2 (imię) _____ |         |         |         |         |                |

### Zadanie 3: Przysiady w 30 sekund

**Cel:** Ocena wytrzymałości nóg.

**Potrzebny sprzęt:** stoper, długopis

#### Instrukcja krok po kroku (praca w parach):

1. Stań prosto, stopy ustaw na szerokość barków.
2. Wykonuj przysiady przez 30 sekund.
3. Druga osoba liczy wykonane powtórzenia.
4. Powtórz ćwiczenie jeszcze raz i zapisz średnią liczbę powtórzeń z obu prób.

| Tabela wyników:      | Próba 1 | Próba 2 | Średnia |
|----------------------|---------|---------|---------|
| Uczeń 1 (imię) _____ |         |         |         |
| Uczeń 2 (imię) _____ |         |         |         |

### Zadanie 4: Ćwiczenia oddechowe I tętno

**Potrzebny sprzęt:** stoper, długopis

#### Instrukcja krok po kroku:

1. Zmierz swoje tętno spoczynkowe (bpm) jak w zadaniu 1. Zapisz wyniki.
2. Wykonaj ćwiczenie oddechowe: 5 głębokich wdechów i wydechów w wolnym tempie.
3. Ponownie zmierz tętno i zapisz wyniki.
4. Oblicz różnicę i procentową zmianę:  
$$\% \text{ zmiany} = ((\text{tętno przed} - \text{tętno po}) \div \text{tętno przed}) \times 100\%$$

| Tabela wyników:      | Tętno przed (bpm) | Tętno po (bpm) | Różnica | % zmiany |
|----------------------|-------------------|----------------|---------|----------|
| Uczeń 1 (imię) _____ |                   |                |         |          |
| Uczeń 2 (imię) _____ |                   |                |         |          |

### Zadanie 5: Skakanie na skakance

**Cel:** Pomiar liczby skoków w ciągu 1 minuty.

**Potrzebny sprzęt:** skakanka, stoper, kartka, długopis

#### Instrukcja krok po kroku:

1. Skacz na skakance przez 1 minutę.
2. Drugi uczeń liczy wykonane przez ciebie skoki.
3. Zapisz wynik.
4. Powtórz ćwiczenie i zapisz wynik, a następnie policz średnią.



| Tabela wyników:      | Tętno przed (bpm) | Tętno po (bpm) | Różnica | % zmiany |
|----------------------|-------------------|----------------|---------|----------|
| Uczeń 1 (imię) _____ |                   |                |         |          |
| Uczeń 2 (imię) _____ |                   |                |         |          |

## Załącznik 4

5

### Zadanie 1: Ilość cukru w soku

Na etykiecie soku napisano, że zawiera 12 g cukru w 100 ml. Uczeń wypija półlitrowy (500 ml) kartonik soku.



1. Oblicz, ile gramów cukru spożyje uczeń, pijąc 500 ml soku.  
\_\_\_\_\_
2. Przelicz wynik na **łyżeczki cukru**, przyjmując, że 1 łyżeczka to ok. 5 g cukru.  
\_\_\_\_\_
3. Porównaj wynik z zalecaną dzienną normą WHO dla dzieci i młodzieży (**6 łyżeczek cukru dziennie**). Sformułuj płynący z tego porównania wniosek.  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

### Zadanie 2: Średnia arytmetyczna – sen

Uczniowie prowadzili przez tydzień dzienniczki snu. Poniżej podano średnią liczbę godzin snu każdego ucznia na dobę:



| Uczeń       | 1   | 2 | 3   | 4 | 5   | 6 | 7   | 8   | 9   | 10 |
|-------------|-----|---|-----|---|-----|---|-----|-----|-----|----|
| Godziny snu | 6,5 | 7 | 5,5 | 6 | 7,5 | 6 | 6,8 | 5,8 | 6,2 | 7  |

1. Oblicz średnią arytmetyczną godzin snu dla wszystkich uczniów.  
\_\_\_\_\_
2. Porównaj wynik z zalecaną ilością snu dla nastolatków (8-10 godzin). Sformułuj wniosek.  
\_\_\_\_\_
3. Odpowiedz na pytania:
  - Czy uczniowie śpią wystarczająco długo?  
\_\_\_\_\_
  - Jakie mogą być konsekwencje niedoboru snu dla zdrowia i koncentracji?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
  - Jakie proste zmiany w codziennych nawykach mogłyby poprawić ilość snu?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Zadanie dla chętnych:** Stwórz wykres słupkowy pokazujący godziny snu poszczególnych uczniów i średnią dla grupy.

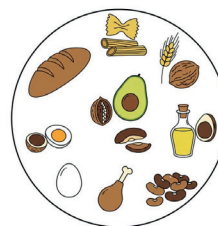
### Zadanie 3: Kalorie i makroskładniki

Uczeń potrzebuje dziennie około 2500 kcal energii.

Rozkład tej energii na makroskładniki powinien wyglądać następująco:

- węglowodany: 50%
- tłuszcze: 30%
- białko: 20%

Wartość energetyczna makroskładników:



- 1 g węglowodanów = 4 kcal
- 1 g tłuszczu = 9 kcal
- 1 g białka = 4 kcal

1. Oblicz, ile kalorii z dziennego zapotrzebowania (2500 kcal) powinno pochodzić z węglowodanów, tłuszczów i białka.

---

2. Przelicz te wartości na gramy poszczególnych makroskładników.

---

3. Wypełnij poniższą tabelę:

| Mikroskładniki | Energia (kcal) | Masa (g) |
|----------------|----------------|----------|
| Węglowodany    |                |          |
| Tłuszcze       |                |          |
| Białko         |                |          |
| Razem          | 2500           | -        |

#### Zadanie dla chętnych:

Sprawdź, czy suma gramów makroskładników odpowiada zapotrzebowaniu kalorycznemu.

Zastanów się, jak zmieniłyby się wartości, gdyby uczeń potrzebował 2000 kcal dziennie.

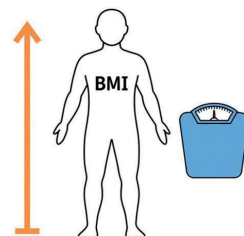
#### Zadanie 4: Obliczanie BMI

BMI (z języka angielskiego: *Body Mass Index* – indeks masy ciała) to wskaźnik, który pozwala ocenić, czy masa ciała osoby jest odpowiednia w stosunku do jej wzrostu.

Oblicza się go według wzoru: 
$$\text{BMI} = \frac{\text{masa ciała (w kilogramach)}}{\text{wzrost (w metrach)}^2}$$

Wynik BMI pomaga wstępnie określić, czy dana osoba ma niedowagę, prawidłową masę ciała, nadwagę czy cierpi na otyłość.

Aby prawidłowo zinterpretować wynik BMI, korzysta się z tabel opracowanych przez Światową Organizację Zdrowia (WHO) oraz Centrum Kontroli i Prewencji Chorób (CDC). Istnieją osobne tabele dla dzieci i młodzieży, ponieważ ich ciało ciągle się rozwija, a wartości BMI zmieniają się wraz z wiekiem. Co ważne, dla dzieci stosuje się oddzielne tabele dla chłopców i dziewczynek, ponieważ ich rozwój przebiega w różnym tempie. Dla dorosłych stosuje się stałe przedziały BMI, niezależnie od płci.



##### A. BMI dorosłych

Pan Michał waży 85 kg i ma 1,80 m wzrostu. Pani Karolina waży 62 kg i ma 1,65 m wzrostu.

a) Oblicz BMI pana Michała i pani Karoliny.

---

b) Sprawdź, w jakim zakresie mieści się ich BMI według Centrum Kontroli i Prewencji Chorób (CDC).

---

c) Kto ma BMI bliższe wartości prawidłowej?

---

**Tabela 1: BMI dla dorosłych (20+ lat)**

| DOROŚLI (powyżej 20 lat) |                                 |
|--------------------------|---------------------------------|
| Kategoria BMI            | Zakres BMI (kg/m <sup>2</sup> ) |
| Niedowaga                | < 18,5                          |
| Prawidłowa masa ciała    | 18,5 – < 25                     |
| Nadwaga                  | 25 – < 30                       |
| Otyłość klasa 1          | 30 – < 35                       |
| Otyłość klasa 2          | 35 – < 40                       |
| Otyłość klasa 3 (ciężka) | ≥ 40                            |

Źródło: [Adult BMI Categories | BMI | CDC](#) [dostęp: 10.09.2025]

**B. BMI dziecka/nastolatka**

Ania ma 12 lat, waży 42 kg i mierzy 1,50 m wzrostu. Jej kolega Bartek waży 48 kg i ma 1,60 m wzrostu.

a) Oblicz BMI Ani i Bartka.

---



---

b) Sprawdź, czy ich BMI mieści się w zakresie prawidłowym, korzystając z tabeli poniżej lub kalkulatora BMI dla dzieci dostępnego na stronie internetowej:

<https://www.mojkalkulator.net/zdrowie/kalkulator-bmi-dzieci>

---



---

c) Kto z nich ma wyższe BMI? Czy oboje mają prawidłową masę ciała?

---



---

**Tabela 2: BMI dla dzieci w wieku 12 lat**

| DZIEWCZYNKI (12 lat)  |                                 |
|-----------------------|---------------------------------|
| Kategoria BMI         | Zakres BMI (kg/m <sup>2</sup> ) |
| Niedowaga             | < 14,8                          |
| Prawidłowa masa ciała | 14,8 – < 21,7                   |
| Nadwaga               | 21,7 – < 25,3                   |
| Znacząca nadwaga      | ≥ 25,3                          |

| CHŁOPCY (12 lat)      |                                 |
|-----------------------|---------------------------------|
| Kategoria BMI         | Zakres BMI (kg/m <sup>2</sup> ) |
| Niedowaga             | < 15,0                          |
| Prawidłowa masa ciała | 15,0 – < 21,0                   |
| Nadwaga               | 21,0 – < 24,2                   |
| Znacząca nadwaga      | ≥ 24,2                          |

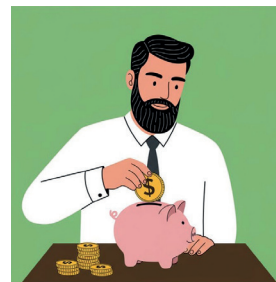
Źródło: Opracowanie własne na podstawie kalkulatora BMI dla dzieci: <https://www.mojkalkulator.net/zdrowie/kalkulator-bmi-dzieci> [dostęp: 10.09.2025]

**Zadanie dla chętnych:**

Możesz obliczyć swoje BMI oraz BMI członków rodziny – rodziców, rodzeństwa, dziadków. Pamiętaj, aby zastosować odpowiednie tabele dla dzieci/nastolatków i dorosłych. Jeśli chcesz, możesz pokazać obliczenia swojemu nauczycielowi.

### Zadanie 5: Zgubne używki

Tata Marcina jest nałogowym palaczem. Kupuje na ogół trzy różne marki papierosów: paczka marki A kosztuje 18 zł, paczka marki B kosztuje 20 zł, paczka marki C kosztuje 22 zł. Każda paczka zawiera 20 papierosów. Tata Marcina wypala średnio 12 papierosów dziennie.



1. Oblicz, ile paczek papierosów tata Marcina wypala średnio w ciągu miesiąca (30 dni).

---

---

2. Oblicz, ile wynoszą miesięczne koszty palenia, jeśli tata kupuje tylko paczki marki A, tylko marki B, a tylko marki C?

---

---

3. Oblicz, ile tata Marcina wydałby w ciągu roku (365 dni), paląc codziennie 12 papierosów, wybierając najdroższą markę (C).

---

---

### Zadanie 6: Słodkie wydatki

Ola i Paweł codziennie kupują i spożywają swoje ulubione produkty:

- Ola: batonik (25 g cukru, 3,50 zł) oraz sok pomarańczowy 250 ml (24 g cukru, 3,20 zł).
- Paweł: drożdżówka (30 g cukru, 4,00 zł) oraz cola 330 ml (35 g cukru, 3,60 zł).



Przyjmij:

1 tydzień = 7 dni, 1 miesiąc = 30 dni.

Oblicz:

1. Ile cukru (w gramach) i jaki koszt (w zł) przypada dziennie na Olę i Pawła.

---

---

2. Ile cukru i jaki koszt przypada tygodniowo – osobno dla Oli i Pawła oraz łącznie dla obojga.

---

---

3. Ile cukru i jaki koszt przypada miesięcznie – osobno i razem.

---

---

4. Średnie tygodniowe i miesięczne spożycie cukru oraz koszt na jedną osobę (Ola i Paweł razem).

---

---

5. Wariant oszczędnościowy: Załóż, że Ola i Paweł kupują i spożywają swoje ulubione produkty tylko co drugi dzień. Oblicz spożycie cukru i koszt w takim wariancie (tygodniowo i miesięcznie). Porównaj z wariantem codziennym i oblicz oszczędności.

---



---



---



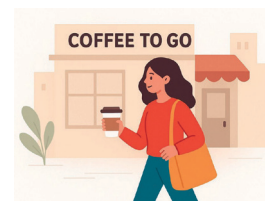
---

6. Wypełnij tabelę:

| Osoba | Cukier dziennie (g) | Koszt dziennie (zł) | Cukier w tygodniu (g) | Koszt w tygodniu (zł) | Cukier w miesiącu (g) | Koszt w miesiącu (zł) |
|-------|---------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ola   |                     |                     |                       |                       |                       |                       |
| Paweł |                     |                     |                       |                       |                       |                       |

### Zadanie 7: Kawa na mieście

Monika, studentka weterynarii, ma zajęcia w różnych miejscach Krakowa. Przemieszczając się między uczelnią, salą gimnastyczną a gabinetem weterynaryjnym, w którym odbywa praktyki, prawie codziennie kupuje kawę na wynos na pobliskiej stacji benzynowej albo w kawiarni. Cena jednej kawy wynosi 9,90 zł.



Oblicz:

1. Ile Monika wydaje średnio w ciągu tygodnia, jeśli kupuje kawę 4 razy w tygodniu.

---



---

2. Ile Monika wydaje w ciągu miesiąca (4 tygodnie).

---



---

3. Ile wynosi koszt roczny, jeśli przyjmujemy, że rok akademicki ma 10 miesięcy zajęć.

---



---

### Zadanie 8: Czas spędzany przed komputerem i innymi urządzeniami

Michał codziennie korzysta z telefonu i komputera w celach nieproduktywnych:

- telefon: średnio 3 godziny dziennie
- komputer: średnio 1,5 godziny dziennie

1. Oblicz, ile godzin Michał spędza miesięcznie na korzystaniu z telefonu i komputera w celach nieproduktywnych, przyjmując 30 dni w miesiącu. Wyniki wpisz do tabeli.

---



---

2. Oblicz, ile godzin w ciągu roku (12 miesięcy) Michał marnuje na telefon i komputer. Wyniki wpisz do tabeli.

---

---

3. Przelicz roczny czas na dni (pamiętaj, że jedna doba to 24 godziny, które obejmują jeden dzień i jedną noc). Wyniki wpisz do tabeli.

---

---

4. Zaproponuj, jak Michał mógłby wykorzystać ten czas produktywnie.

---

---

| Urządzenie | Czas dzienny (godziny) | Czas miesięczny (30 dni) | Czas roczny (12 miesięcy) |
|------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Telefon    |                        |                          |                           |
| Komputer   |                        |                          |                           |
| Razem      |                        |                          |                           |

### Zadanie 9: Telefon i internet

Na początku stycznia Agata porównuje trzy oferty operatora internetu, aby wybrać usługę na rok. W minionym roku wykorzystanie internetu w GB w poszczególnych miesiącach wynosiło: styczeń: 12, luty: 18, marzec: 28, kwiecień: 8, maj: 22, czerwiec: 35, lipiec: 60, sierpień: 45, wrzesień: 15, październik: 10, listopad: 20, grudzień: 25.

Założenie: Wykorzystanie internetu w GB w poszczególnych miesiącach będzie takie samo jak w minionym roku.

Dostępne oferty:

**Plan A (abonament):** 60 zł miesięcznie, 30 GB w pakiecie.

**Plan B (prepaid):** 45 zł miesięcznie, 15 GB w pakiecie; dodatkowe paczki 5 GB za 10 zł.

**Plan C (roczny prepaid):** 600 zł za rok (nielimitowany Internet) + jednorazowa aktywacja 50 zł.

Zadania:

1. Oblicz roczny koszt każdej opcji (uwzględnij dopłaty w Planie B).

---

---

2. Wskaż najtańszą ofertę i oblicz, ile można zaoszczędzić w skali roku w porównaniu z dwiema pozostałymi ofertami.

---

---

3. Uzupełnij tabelę.

| Plan               | Koszt roczny | Wnioski / Uwagi |
|--------------------|--------------|-----------------|
| A (abonament)      |              |                 |
| B (prepaid)        |              |                 |
| C (roczny prepaid) |              |                 |

4. Zaproponuj, co można zrobić z oszczędzoną kwotą.

---

---

## Matematyka i ekonomia – kształtowanie myślenia analitycznego w szkole podstawowej

*Sztuka ekonomii polega na tym, by spoglądać nie tylko na bezpośrednie, ale i na odległe skutki danego działania czy programu; by śledzić nie tylko konsekwencje, jakie dany program ma dla jednej grupy, ale jakie przynosi wszystkim.*

Henry Hazlitt<sup>1</sup>

### Wprowadzenie

Współczesna edukacja coraz częściej akcentuje potrzebę łączenia różnych obszarów wiedzy tak, aby jak najlepiej przygotować uczniów do wyzwań szybko zmieniającego się świata. Nauczyciele, bazując na praktyce szkolnej, podejmują liczne działania, które sprzyjają rozwijaniu myślenia analitycznego – między innymi poprzez rozwiązywanie problemów osadzonych na styku matematyki i innych dziedzin: fizyki, chemii, informatyki czy ekonomii.

Takie podejście nie tylko wspiera logiczne i krytyczne rozumowanie, ale również uczy dostrzegania wzorców, zależności i konsekwencji podejmowanych decyzji. W niniejszym artykule zostaną omówione praktyczne sposoby rozwijania myślenia analitycznego w szkole podstawowej z naciskiem na integrację matematyki i ekonomii.

### Myślenie analityczne

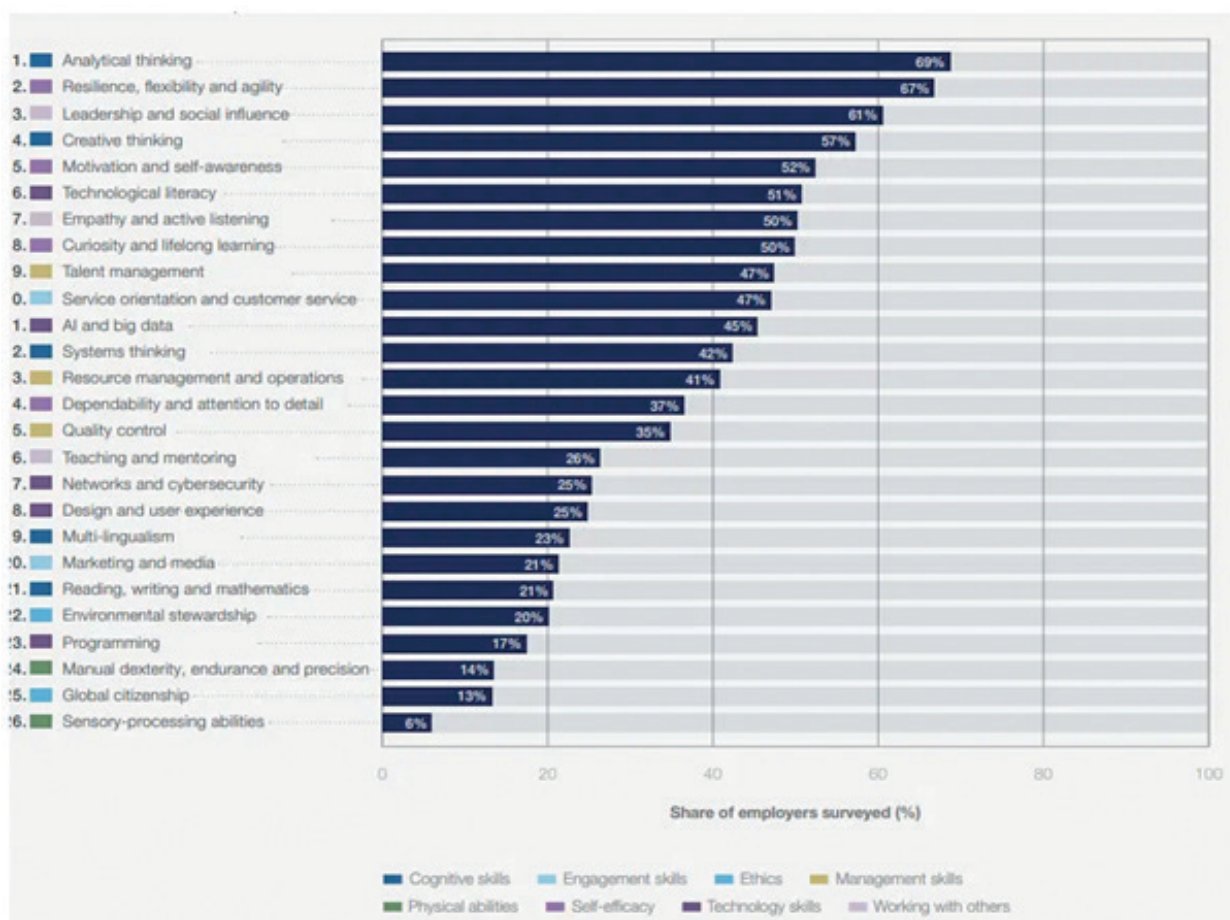
Myślenie analityczne można określić jako zdolność do systematycznego i logicznego rozwiązywania problemów. Polega ono na rozbijaniu złożonych zagadnień na prostsze elementy, które łatwiej przeanalizować i zrozumieć. Dzięki temu uczeń potrafi lepiej zidentyfikować istotę problemu, a następnie wyciągnąć trafne wnioski.

Umiejętność analizowania informacji, rozpoznawania wzorców i oceny skutków decyzji jest wysoko ceniona nie tylko w nauce, ale także w codziennym życiu i pracy zawodowej. W wielu ofertach pracy wskazuje się obecnie analityczne myślenie jako jedną z kluczowych kompetencji.

Badania przeprowadzone przez Światowe Forum Ekonomiczne, opisane w raporcie *Future of Jobs 2025*<sup>2</sup>, jednoznacznie pokazują, że właśnie ta umiejętność (69%) będzie należała do najważniejszych kompetencji przyszłości, oczekiwanych przez pracodawców. Obok niej wyróżnia się również: odporność, elastyczność i zwinność (67%), przywództwo i wpływ społeczny (61%), myślenie kreatywne (57%), motywacja i samoświadomość (52%), umiejętność posługiwania się technologią (51%), empatię i aktywne słuchanie (50%), ciekawość i gotowość do uczenia się przez całe życie (50%), zarządzanie talentami (47%) oraz zorientowanie na usługi i obsługę klienta (47%) (zob. wykres 1).

<sup>1</sup> Hazlitt, H. (1993), *Ekonomia w jednej lekcji*, Kraków: Znak-Signum, s. 17.

<sup>2</sup> World Economic Forum. (2025), *The Future of Jobs Report 2025*. <https://www.weforum.org/publications/the-future-of-jobs-report-2025/> [dostęp: 15.09.2025]



Wykres. 1. Kluczowe umiejętności prognozowane na lata 2025-2030. Odsetek pracodawców, którzy uważają wskazane umiejętności za kluczowe dla swoich pracowników<sup>3</sup>.

Podobne wnioski przynoszą analizy Infuture.institute, zaprezentowane w raporcie *Pracownik przyszłości*<sup>4</sup>. Wskazują one, że osoba posiadająca zdolność analitycznego myślenia zazwyczaj wykazuje także inne kompetencje, takie jak kreatywność, krytyczne myślenie, umiejętność współpracy, negocjacji czy biegłość cyfrowa (zob. wykres 2).



Wykres 2. Kompetencje przyszłości<sup>5</sup>.

<sup>3</sup> Gideon, S. (2025). *Most in-demand core skills globally in 2025–2030*. Human Resources Online. <https://www.humanresourcesonline.net/most-in-demand-core-skills-globally-in-2025-2030> [dostęp: 22.09.2025]

<sup>4</sup> infuture.institute. (n.d.). *Scenariusze przyszłości*. <https://infuture.institute/trendy/future-of-work/scenariusze-przyszlosci/> [dostęp: 22.09.2025]

<sup>5</sup> Tamże.

## Dlaczego myślenie analityczne jest tak ważne?

Myślenie analityczne nie ogranicza się do profesji typowo związanych z analizą danych. Coraz częściej oczekuje się go od pracowników niemal każdej branży – od finansistów i programistów, przez logistyków, sprzedawców, po architektów czy specjalistów HR.

W sektorze finansowym pozwala ono skutecznie zarządzać ryzykiem i planować inwestycje. W marketingu umożliwia zrozumienie zachowań konsumentów i dostosowanie ofert do ich potrzeb. W medycynie wspiera proces diagnostyki, a w logistyce – usprawnia funkcjonowanie łańcucha dostaw. Tak szerokie zastosowanie pokazuje, że zdolność do logicznej analizy i wyciągania wniosków jest kompetencją uniwersalną, przydatną w różnych kontekstach zawodowych.

Ekonomia jako dziedzina wiedzy szczególnie dobrze sprzyja kształtowaniu tych kompetencji. Uczy bowiem analizowania danych, stawiania hipotez i ich weryfikowania, a także racjonalnego podejmowania decyzji w oparciu o fakty.

## Myślenie analityczne a ekonomia

Ekonomia, badając procesy rynkowe, wybory konsumenckie czy alokację zasobów, stanowi naturalne pole do ćwiczenia analitycznego myślenia. Rozwiązując zadania i problemy ekonomiczne, uczniowie uczą się:

- oceniać różne scenariusze,
- przewidywać skutki decyzji,
- dostrzegać powiązania między zjawiskami,
- opierać się na danych i faktach zamiast na przypuszczeniach.

W dobie cyfryzacji dostęp do danych jest praktycznie nieograniczony. Dlatego kluczowe staje się umiejętne ich gromadzenie, selekcja i interpretacja. Istotne są również zdolności prognozowania trendów oraz krytyczna ocena wiarygodności źródeł informacji.

## Myślenie analityczne w edukacji

Ministerstwo Edukacji Narodowej, wskazując główne kierunki polityki oświatowej państwa na rok szkolny 2025/2026, podkreśla znaczenie rozwijania myślenia analitycznego poprzez interdyscyplinarne podejście do nauczania. Szczególną rolę przypisuje się tu matematyce i przedmiotom ścisłym. Szkoły, które wprowadzają takie podejście, przygotowują uczniów do samodzielnego rozwiązywania złożonych problemów, uczą pracy z danymi i zachęcają do zadawania pytań. Popularne stają się projekty badawcze, studia przypadków czy praca zespołowa, które w naturalny sposób rozwijają zdolności analityczne.

Korzyści z kształtowania myślenia analitycznego w edukacji są wielowymiarowe:

- ułatwia ono funkcjonowanie w świecie opartym na danych,
- przygotowuje do kariery zawodowej,
- wspiera rozwój kreatywności i samodzielności,
- uczy podejmowania decyzji w oparciu o fakty.

## Rozwijanie myślenia analitycznego w szkole

Praktyczne rozwijanie myślenia analitycznego wśród dzieci i młodzieży powinno opierać się na różnorodnych aktywnościach. Projekty badawcze, analiza studiów przypadków czy konkursy tematyczne pozwalają uczniom nie tylko zdobywać wiedzę, ale również uczyć się jej stosowania.

Dobrym przykładem takiej inicjatywy jest konkurs „**Matematyka i Ekonomia**”<sup>6</sup>, który integruje wie-

<sup>6</sup> Konkurs „Matematyka i Ekonomia” organizowany jest przez Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu we współpracy z Narodowym Bankiem Polskim oraz Uniwersytetem Ekonomicznym wrocławskim.

dzę matematyczną z ekonomiczną, rozwijając jednocześnie kluczowe kompetencje: pracę zespołową, krytyczne myślenie, umiejętność wyszukiwania i selekcjonowania informacji oraz rozwiązywania problemów w praktycznym kontekście.

### Przykłady zadań rozwijających myślenie analityczne w kontekście ekonomii

Rozwiązywanie zadań ekonomicznych daje uczniom możliwość ćwiczenia analizy danych i przewidywania skutków decyzji. Przykładowe zadania mogą dotyczyć:

1. **Budżetu domowego** – zaplanowanie wydatków rodziny przy określonym dochodzie i konieczności wyboru priorytetów.
2. **Zakładania firmy** – analiza kosztów początkowych, przewidywanie przychodów i ocena opłacalności przedsięwzięcia.
3. **Porównania ofert bankowych** – wybór najkorzystniejszego kredytu lub lokaty na podstawie różnych parametrów.
4. **Analizy danych rynkowych** – interpretacja prostych statystyk dotyczących cen, popytu czy podaży.
5. **Symulacji inwestycji** – ocena ryzyka i przewidywanie możliwych zysków w zależności od przyjętych scenariuszy.

W dalszej części artykułu przedstawiam zestaw zadań ekonomicznych obejmujących następujące obszary:

- Budżet domowy – rachunkowość domowa,
- Prowadzenie własnej firmy,
- Porównywanie ofert bankowych,
- Analiza danych rynkowych,
- Symulacja inwestycji.

## Budżet domowy – rachunkowość domowa

### Zadanie 1<sup>7</sup>

Średnia cena 1 m<sup>3</sup> wody w woj. dolnośląskim wynosi 11,35 zł, a wody ciepłej – 18,11 zł.

#### Wykonaj obliczenia:

1. W mieszkaniu Pani Kowalskiej kapie z kranu zimna woda – 60 kropli na minutę, co daje 4 litry wody straty dziennie. Hydraulik usunął usterkę dopiero po 20 dniach. Oblicz, o ile wzrosną rachunki pani Kowalskiej za wodę.
2. Nieznaczny przeciek ze spłuczki, widoczny jako cienka strużka w muszli, jest równoznaczny utracie średnio 150 litrów wody w ciągu doby. Oblicz, ile metrów sześciennych wody tracimy, jeżeli nie naprawimy spłuczki w ciągu 3 dni.
3. Na kąpiel w wannie potrzeba średnio 150 litrów wody, natomiast pod prysznicem zużywa się średnio 50 litrów. Oblicz, ile złotych w ciągu tygodnia zaoszczędzi trzyosobowa rodzina, jeśli codziennie wybierze prysznic zamiast kąpeli w wannie. Przyjmij, że stosunek zużycia wody zimnej do ciepłej wynosi 1 : 2.

nym we Wrocławiu. Jest skierowany do uczniów klas IV-VI oraz VII-VIII szkół podstawowych województwa dolnośląskiego. <https://dodn.dolnyslask.pl/konkursy/mie/> [dostęp: 22.09.2025]

<sup>7</sup> Zadania od 1 do 6 to zadania konkursowe konkursu „Matematyka i Ekonomia”.

4. Myjąc zęby wodą bieżącą, wylewamy z kranu 10 l wody. Oblicz, ile razy mógłbyś umyć zęby taką ilością wody, jeśli do jednorazowego mycia w zupełności wystarczy jej kubeczek o objętości 250 mililitrów.

### Zadanie 2

Producent sprzedaje w promocji ocet w dwóch wersjach:

- Promocja I – Za tę samą ilość octu zapłacisz o 30% mniej.
- Promocja II – Za tę samą cenę otrzymasz 30% więcej octu.

Która z tych promocji jest bardziej opłacalna dla klienta?

### Zadanie 3

W tabeli poniżej przedstawiono ceny kupna i sprzedaży dwóch walut w kantorze MONEY.

|                  | Kupno   | Sprzedaż |
|------------------|---------|----------|
| 1 dolar          | 4,18 zł | 4,25 zł  |
| 1 funt brytyjski | 5,10 zł | 5,22 zł  |

Wykonaj obliczenia:

1. Anna kupiła 100 dolarów, a Bartek 100 funtów brytyjskich. O ile mniej zapłaciła Anna od Bartka?
2. Marcin chce wymienić 400 funtów brytyjskich na dolary. W tym celu musi najpierw wymienić funty na złotówki, a następnie otrzymane złotówki na dolary. Ile dolarów otrzyma Marcin?

### Zadanie 4

Tabela przedstawia ceny kart wstępu na lodowisko. Czas jazdy uwzględnia liczbę wejść oraz czas jednego pobytu na lodowisku.

| Numer karty | I            | II            | III          | IV           |
|-------------|--------------|---------------|--------------|--------------|
| Czas jazdy  | 10 x 1 godz. | 8 x 1,5 godz. | 20 x 1 godz. | 15 x 1 godz. |
| Cena karty  | 100 zł       | 100 zł        | 160 zł       | 140 zł       |

Oblicz, przy zakupie której karty godzina jazdy jest najtańsza.

### Zadanie 5

Podczas pobytu w górach Lena wypożyczyła narty w wypożyczalni SKI-SUPER, a Nadia w wypożyczalni SKI-EKSTRA.

**SKI-SUPER**

**CENA ZA WYPOŻYCZENIE NART: 20 ZŁ**

**ZA KAŻDĄ ROZPOCZĘTĄ GODZINĘ**

**DODATKOWO 5 ZŁ**

**SKI-EKSTRA**

**CENA ZA WYPOŻYCZENIE NART: 32 ZŁ**

**ZA KAŻDĄ ROZPOCZĘTĄ GODZINĘ**

**DODATKOWO 3 ZŁ**

Lena i Nadia zapłacą tyle samo, jeżeli będą używały nart przez:

- A. 2 godziny      B. 4 godziny      C. 6 godzin      D. 8 godzin

### Zadanie 6

Ania i Kasia trzymają swoje oszczędności w skarbonkach. Ania ma w swojej skarbonce 60 zł i co tydzień odkłada 2,50 zł, natomiast Kasia posiada już 100,80 zł i każdego tygodnia odkłada 1,20 zł. Oblicz, po ilu tygodniach oszczędności Ani przewyższą oszczędności Kasi.

### Zadanie 7<sup>8</sup>

Pan Jan posiada kartę kredytową z okresem rozliczeniowym wynoszącym 30 dni oraz całkowitym okresem bezodsetkowym liczącym 54 dni. W trakcie cyklu rozliczeniowego dokonał następujących transakcji:

- 4. dzień – zakup w księgarni: 100 zł,
- 10. dzień – wypłata z bankomatu: 100 zł,
- 25. dzień – opłata za szkołę językową: 300 zł,
- 29. dzień – sklep sportowy: 300 zł.

1. Oblicz wysokość odsetek naliczonych przez bank, jeśli klient spłacił w 54. dniu 650 zł, a pozostałe 50 zł uregulował 55. dnia. Przyjmij oprocentowanie 12%.
2. Czy w przypadku jednorazowej spłaty całego zadłużenia w terminie wskazanym na wyciągu właściciel karty skorzysta z darmowego kredytu? Uzasadnij odpowiedź.

### Zadanie 8<sup>9</sup>

Wykonaj poniższe zadania dotyczące budżetu domowego.

1. Jedna z definicji budżetu domowego brzmi: budżet domowy to opracowywany przez członków gospodarstwa domowego finansowy plan dochodów i wydatków. Sformułuj własną definicję.
2. Wymień cele, na które przeznaczasz część swoich pieniędzy (np. z kieszonkowego), które mógłbyś określić jako wydatki stałe.
3. Wymień cele, na które przeznaczasz część swoich pieniędzy (np. z kieszonkowego), które mógłbyś określić jako wydatki zmienne.
4. Wyjaśnij, po co nam budżet domowy.
5. Przyporządkuj podane w ramce przykłady wydatków do właściwej kategorii wydatków.

- opłaty komunikacyjne • wydatki na żywność • opłata za media
- wydatki na kosmetyki • wydatki na remont • opłaty za czynsz
- spłata raty kredytu

| WYDATKI STAŁE | WYDATKI ZMIENNE |
|---------------|-----------------|
|               |                 |

<sup>8</sup> „Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i logicznymi z odpowiedziami dla szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych”, praca zbiorowa, Komisja Nadzoru Finansowego, Wydawnictwo CEDUR, Warszawa 2015, (zad. 1 s. 26). [https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze\\_lekcji\\_zadania\\_mat\\_log\\_42889.pdf](https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze_lekcji_zadania_mat_log_42889.pdf) [dostęp 22.09.2025]

<sup>9</sup> „Budżet domowy”, Zintegrowana Platforma Edukacyjna, <https://zpe.gov.pl/a/budzet-domowy/DZ2YypJCs> [dostęp 22.09.2025]

6. Rozstrzygnij, czy zdania dotyczące poniższego wykresu są prawdziwe czy fałszywe.

| Zdanie                                                                                                                                  | Prawda | Fałsz |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------|
| Największy procentowo udział w wydatkach ogółem stanowią wydatki zmienne.                                                               |        |       |
| Wśród wydatków należących do wydatków stałych najwyższą pozycję zajmują wydatki związane z opłatami za czynsz i media.                  |        |       |
| Najmniej wydatków w 2020 r. gospodarstwa domowe ponosiły na edukację i wypłaty kieszonkowego..                                          |        |       |
| Dwie największe grupy wydatków stałych ponoszonych przez gospodarstwa domowe w 2020 r. stanowiły łącznie 50% wydatków tych gospodarstw. |        |       |
| Wśród trzech procentowo największych wydatków gospodarstw domowych jeden wydatek należy do kategorii wydatków zmiennych.                |        |       |

Wykres: Struktura przeciętnych miesięcznych wydatków na 1 osobę w gospodarstwach domowych w % wydatków ogółem w 2020 r.



Źródło: Learnetic S.A., <https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/warunki-zycia/dochody-wydatki-i-warunki-zycia-ludnosci/budzety-gospodarstw-domowych-w-2020-roku,9,15.html>, licencja: CC BY 4.0.

## Prowadzenie firmy

### Zadanie 1<sup>10</sup>

Kurs akcji spółki ARES na dzień 31 stycznia 2023 r. wyniósł 20 zł, zaś na dzień 31 stycznia 2024 r. wyniósł 24 zł. Wyznacz procentowy przyrost wartości akcji w roku 2024.

### Zadanie 2

Hurtownia „Hurteks” oferuje rabat w wysokości 3% w wypadku zapłaty w dniu zakupu, a za każdy dzień opóźnienia w zapłacie, pobiera odsetki w wysokości 1% od kwoty na rachunku. Robisz zakupy na sumę 2000 zł. O ile więcej zapłacisz, płacąc za towar po dwóch dniach, niż płacąc przy odbiorze?

<sup>10</sup> Zadania 1-7 to zadania konkursowe konkursu „Matematyka i Ekonomia”.

### **Zadanie 3**

Zarobek sprzedawcy stanowi 5% ceny sprzedanego towaru. Ile złotych musi kosztować sprzedany towar, aby sprzedający zarobił 200 zł?

### **Zadanie 4**

Przedsiębiorstwo „Laptopik” planuje miesięcznie produkować 200 laptopów. W kwietniu wyprodukowano zgodnie z planem 200 sztuk. W następnym miesiącu produkcja zmalała o 3%. Oblicz, o ile procent trzeba zwiększyć produkcję w czerwcu, w stosunku do maja, aby plan został wykonany. Zapisz obliczenia. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.

### **Zadanie 5**

Pani Anna prowadzi sklep z artykułami RTV. W hurtowni zakupiła partię 100 telewizorów, po 1200 zł każdy. Koszty prowadzenia jej działalności wynoszą 3000 zł miesięcznie. Oblicz, jaką cenę telewizora musi ustalić pani Anna, by sprzedając wszystkie urządzenia z zamówionej partii w ciągu miesiąca, osiągnęła zysk 20%.

### **Zadanie 6**

Pan Nowak zajmuje się produkcją obuwia. Obliczył, że całkowite koszty stałe produkcji wynoszą 1600 zł miesięcznie, a jednostkowe koszty zmienne – 60 zł. Ustalił również, że cena sprzedaży jednej pary obuwia wynosi 140 zł.

1. Oblicz, jaką minimalną miesięczną produkcję obuwia musi osiągnąć pan Nowak, aby nie ponieść straty.
2. Obuwie pana Nowaka cieszyło się dużym powodzeniem. W ciągu roku sprzedał wszystkie wyprodukowane pary, a jego zysk wyniósł 45200 zł. Oblicz, ile par butów wyprodukował pan Nowak.

### **Zadanie 7**

Supermarket sprzedaje groszek w puszcze po 1,60 zł. Tygodniowo sprzedaje się 400 puszek. Kierownik szacuje, że każde 10 groszy obniżki spowodowałyby dodatkową sprzedaż 100 puszek tygodniowo. Supermarket kupuje puszki od producenta płacąc 1 zł za puszkę.

1. Oblicz, jaką cenę powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk był największy.
2. Zapisz wzór zależności zysku od wartości obniżki ceny groszku.
3. Oblicz, jaką cenę powinien ustalić sprzedawca, gdyby każda obniżka o 10 groszy zwiększała sprzedaż tylko o 40 puszek.

## **Porównanie ofert bankowych**

---

### **Zadanie 1<sup>11</sup>**

Klient wpłacił 1000 zł na lokatę bankową. Oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, a dochód nie podlega opodatkowaniu. Obowiązuje procent prosty, tj. odsetki dopisywane są jedynie do początkowo zdeponowanej kwoty. Ponadto kapitalizacja odsetek następuje „z dołu” w odcinkach rocznych.

1. Oblicz, ile wynosi kwota lokaty na koniec: pierwszego, drugiego oraz piątego roku.

<sup>11</sup> Zad. 1 i 2 pochodzą z publikacji „Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych”, praca zbiorowa, Komisja Nadzoru Finansowego, Wydawnictwo CEDUR, Warszawa 2015, (zad. 1 str. 11, zad. 6, str. 12), [https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze\\_lekcji\\_zbior\\_zadan\\_42891.pdf](https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze_lekcji_zbior_zadan_42891.pdf)

2. Ponownie dokonaj obliczeń z pkt. 1, zakładając, że obowiązuje procent składany, tj. odsetki dopisywane są do początkowo zdeponowanej kwoty powiększonej o dotychczas naliczone odsetki.
3. Oblicz, po ilu latach kwota lokaty się podwoi w przypadku procentu prostego oraz procentu składanego.

### Zadanie 2

Bank oferuje klientowi dwa rodzaje kredytów na okres 1 roku:

- o oprocentowaniu 10%, które jest płatne jednorazowo na koniec okresu kredytowania, bez prowizji i innych opłat,
- z prowizją 10%, która jest płatna jednorazowo „z góry”, bez odsetek i innych opłat.

Który kredyt jest korzystniejszy dla klienta?

Czy odpowiedź na to pytanie będzie taka sama, jeżeli kredyt będzie spłacany w dwóch równych ratach półrocznych? Dla uproszczenia obliczeń należy założyć, że każde półrocze ma identyczną liczbę dni.

### Zadanie 3<sup>12</sup>

Wpłaciłeś 1000 zł na konto, którego oprocentowanie jest równe 4% w stosunku rocznym. Oblicz, jaka będzie realna wartość twoich pieniędzy po roku, jeżeli inflacja roczna jest równa 2%. Wynik zaokrąglaj do 0,01. Jakie było realne oprocentowanie w tym banku?

## Analiza danych rynkowych

### Zadanie 1<sup>13</sup>

Wykres przedstawia zmiany cen dziennych akcji firmy MirJol w ciągu kolejnych czternastu dni stycznia.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij luki w zdaniach, wpisując odpowiednie liczby.

1. Cena akcji w tym okresie wzrosła o \_\_\_\_ zł.
2. Największy spadek ceny akcji zaobserwowano \_\_\_\_ lipca, a największy wzrost \_\_\_\_ lipca.
3. Cena akcji wzrastała (podaj wszystkie dni): \_\_\_\_\_ lipca.

<sup>12</sup> Zadanie konkursowe konkursu „Matematyka i Ekonomia”.

<sup>13</sup> „Odczytywanie danych statystycznych”, Zintegrowana Platforma Edukacyjna (ćwiczenie 1) <https://zpe.gov.pl/watek/LP160A5Z5f/3/b/powtorzenie---statystyka-kombinatoryka-prawdopodobienstwo/PkDmoQtpG> [dostęp 22.09.2025]

## Zadanie 2<sup>14</sup>

Rynek pewnego towaru możemy scharakteryzować funkcjami popytu i podaży, przy czym funkcja popytu przyjmuje postać  $Q_D = 1925 - 5p$ , funkcja podaży  $Q_S = 1540 + 20p$ , gdzie  $p$  oznacza cenę towaru.

1. Podaj cenę i ilość równowagi rynkowej.
2. Jak zmieni się cena równowagi rynkowej i ilość towaru równoważąca rynek, jeśli na wskutek wzrostu atrakcyjności towaru według klientów popyt na dane dobro wzrośnie o 155 sztuk przy każdym poziomie ceny?
3. Jak zmieni się cena równowagi rynkowej i ilość towaru równoważąca rynek, jeśli na skutek spadku dochodów konsumentów popyt na dane dobro spadnie o 10%?

## Symulacja inwestycji

### Zadanie 1<sup>15</sup>

Uczeń inwestuje 200 zł na lokacie 4% rocznie. Oblicz z użyciem arkusza kalkulacyjnego, ile zgromadzi po 3 latach, jeśli odsetki są kapitalizowane rocznie.

### Zadanie 2

Zbuduj w arkuszu symulację dwóch inwestycji: A – 3% z kapitalizacją roczną przez 5 lat, B – 2% rocznie, ale z kapitalizacją co pół roku. Porównaj wyniki na wykresie i wyciągnij odpowiednie wnioski.

### Zadanie 3

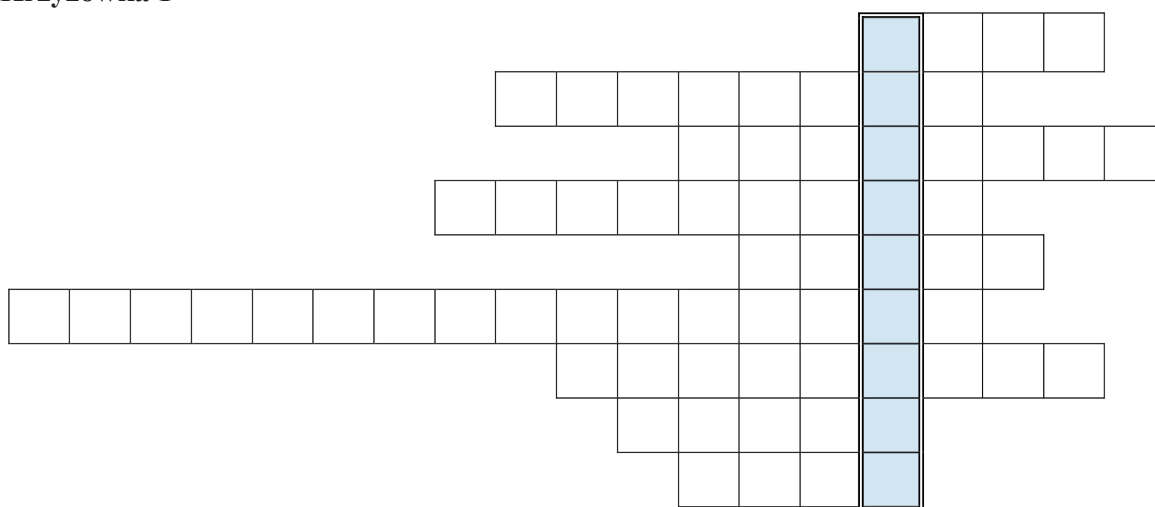
Bank A oferuje oprocentowanie 3% w skali roku, a Bank B – 2,5% z kapitalizacją kwartalną.

- a) Oblicz, w którym banku po roku kwota 2000 zł urośnie bardziej.
- b) Zbuduj w arkuszu kalkulacyjnym prostą symulację: porównaj, ile zarobisz w ciągu 5 lat w obu bankach. Zrób wykres słupkowy pokazujący różnicę.

## Krzyżówki i rebusy

### Krzyżówka 1<sup>16</sup>

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.



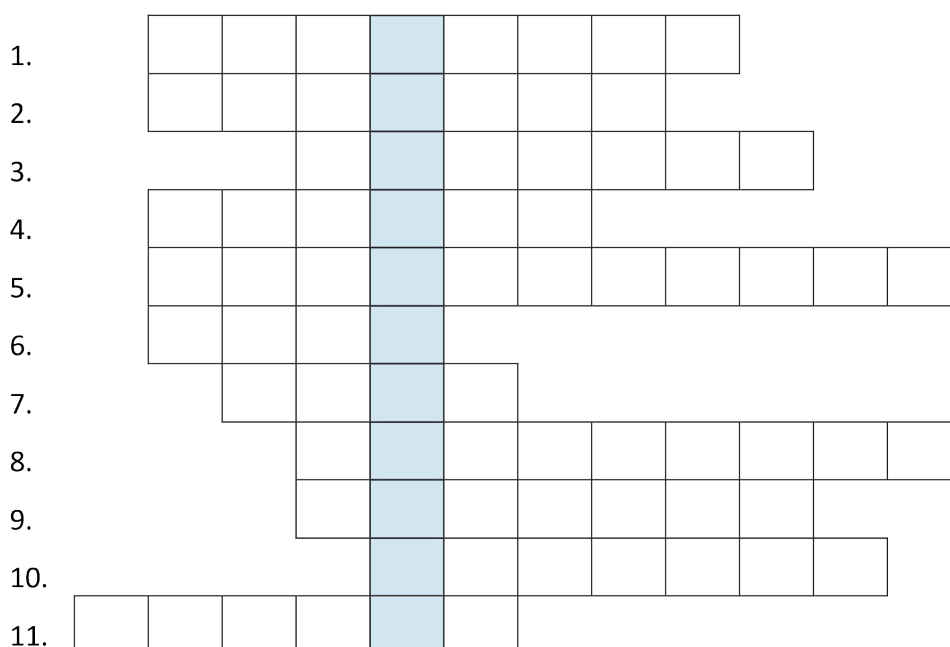
<sup>14</sup> „Zadania powtórzeniowe” <https://www.studocu.com/pl/document/universytet-rzeszowski/ekonomia/zadania-powtorzeniowe/12276183> (zad. 2) [dostęp 22.09.2025]

<sup>15</sup> Zadania 1 – 3: opracowanie własne.

<sup>16</sup> „Rozdział II. Rynek – cechy i funkcje. Bloki zajęć jednogodzinne” (str. 14). Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2010. <https://zasobyip2.ore.edu.pl/pl/publications/download/8894> [dostęp 22.09.2025]. Materiał jest częścią publikacji „Scenariusze lekcji do przedmiotu podstawy przedsiębiorczości”, opracowanej w ramach projektu „Przedsiębiorcze szkoły”, realizowanego w latach 2011-2013 przez Wyższą Szkołę Informatyki i Zarządzania w Rzeszowie.

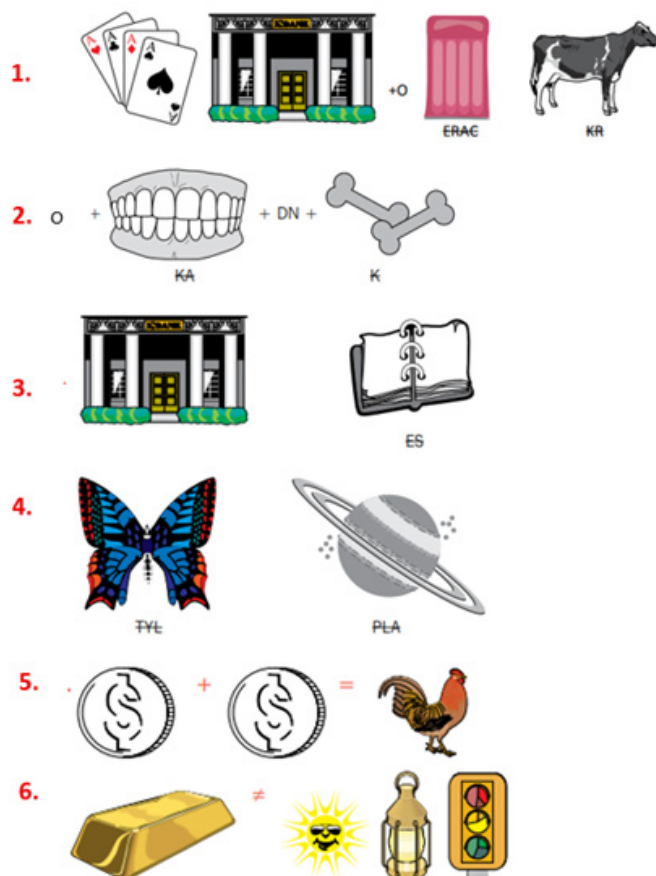
1. Podmiot, który może wprowadzać ceny minimalne lub maksymalne.
2. Sytuacja, w której, przy danej cenie, wielkość popytu na dane dobro przewyższa wielkość podaży na nie.
3. Sytuacja, w której, przy danej cenie, wielkość podaży znacznie przekracza wielkość popytu.
4. Jego interesy chroni cena maksymalna.
5. \_\_\_\_\_ równowagi występuje wtedy, gdy producenci chcą kupić dokładnie tyle samo dóbr i usług, ile oferują producenci.
6. Jego interesy chroni cena minimalna.
7. Cena \_\_\_\_\_ to najniższa cena, jaka można ustalić na dane dobro.
8. Inna nazwa na ruch okrężny.
9. Pieniężny ekwiwalent jednostki towaru.

### Krzyżówka 2<sup>17</sup>



1. Urządzenie do wypłacania pieniędzy.
2. Wartość banknotu, np. 100 zł.
3. Krótki film zachęcający do kupienia jakiegoś towaru.
4. Składają się z nich złote polskie.
5. Inaczej gospodarowanie.
6. Wspólna waluta europejska.
7. Kwota na metce, za którą możemy kupić towar.
8. Małe dzieci przechowują w niej pieniądze.
9. Metalowy pieniądz.
10. Składają się na budżet domowy obok przychodów.
11. Zestawienie przychodów i wydatków.

<sup>17</sup> „Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla uczniów szkół podstawowych i ponadgimnazjalnych”, Anna Cichy, Ewa Kęsik, Wojciech Wyszniński, Komisja Nadzoru Finansowego, Wydawnictwo CEDUR, Warszawa 2015 (str. 18), [https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze\\_lekcji\\_podst\\_ponadgimn\\_42887.pdf](https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze_lekcji_podst_ponadgimn_42887.pdf) [dostęp 22.09.2025]



## Podsumowanie

Rozwijanie myślenia analitycznego jest jednym z najważniejszych zadań edukacji XXI wieku. Matematyka i ekonomia, dzięki swojej ścisłej strukturze oraz praktycznemu zastosowaniu, stanowią idealne narzędzia do kształtowania tej kompetencji już na etapie szkoły podstawowej.

Uczniowie, którzy nauczą się krytycznie analizować dane, dostrzegać wzorce i przewidywać konsekwencje decyzji, będą lepiej przygotowani zarówno do dalszej edukacji, jak i do wyzwań życia codziennego oraz zawodowego.

Integracja matematyki z ekonomią nie tylko wzbogaca proces kształcenia, ale także sprawia, że wiedza staje się bliższa rzeczywistości uczniów. Dzięki temu szkoła może skuteczniej realizować swoje główne zadanie – przygotowanie młodych ludzi do świadomego, odpowiedzialnego i twórczego uczestnictwa w świecie przyszłości.

<sup>18</sup> „Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla uczniów szkół podstawowych i ponadgimnazjalnych”, Anna Cichy, Ewa Kęsik, Wojciech Wyszynski, Komisja Nadzoru Finansowego, Wydawnictwo CEDUR, Warszawa 2015 (str. 13 i 17), [https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze\\_lekcji\\_podst\\_ponadgimn\\_42887.pdf](https://www.knf.gov.pl/knf/pl/komponenty/img/scenariusze_lekcji_podst_ponadgimn_42887.pdf) [dostęp 22.09.2025]

## Sztuczna inteligencja a zajęcia interdyscyplinarne

Ministerstwo Edukacji Narodowej, ogłaszając priorytety polityki oświatowej państwa, kładzie co roku nacisk na nauczanie przedmiotów przyrodniczych i ścisłych. Jednym z priorytetów polityki oświatowej na rok szkolny 2025/2026 jest kształtowanie myślenia analitycznego poprzez interdyscyplinarne podejście do nauczania przedmiotów przyrodniczych i ścisłych oraz rozwijanie umiejętności matematycznych w kształceniu ogólnym.

Zadaję sobie pytanie, czy młody, dopiero rozpoczynający pracę nauczyciel, poradzi sobie z takim wyzwaniem. A jeśli nie, to w jaki sposób może szukać rozwiązania?

Odpowiedź jest prosta – może on wykorzystać w swojej pracy sztuczną inteligencję. Ta nowa technologia pozwala na analizę dużej liczby danych, wykonywanie skomplikowanych obliczeń, rozwiązywanie trudnych problemów. Może być wykorzystywana w różnych dziedzinach nauki. W dużym stopniu ułatwia ona pracę także nauczycielowi. Pomaga mu w planowaniu zajęć, w przygotowaniu materiałów edukacyjnych, scenariuszy lekcji, quizów, zadań, kart pracy, testów i sprawdzianów. Sztuczna inteligencja może posłużyć nauczycielowi do generowania analogicznych przykładów czy wspomóc w analizie błędów ucznia. Narzędzie to pomaga dostosować materiały do potrzeb edukacyjnych ucznia, jego możliwości oraz ewentualnych niepełnosprawności czy trudności. Dostosowuje także treści i metody pracy do indywidualnych potrzeb ucznia. Dzięki wykorzystaniu sztucznej inteligencji nauczyciel może także zaoszczędzić czas przeznaczony na przygotowanie materiałów do zajęć. Będzie pracował szybciej, efektywniej oraz skuteczniej.

Sztuczna inteligencja stanowi ogromne wsparcie, ale ma także swoje ograniczenia. Należy zwerifikować materiał, który wygeneruje, sprawdzić, czy na pewno jest zgodny z treściami podstawy programowej, wymaganiami edukacyjnymi obowiązującymi na danym etapie kształcenia, a także czy materiał posiada odpowiedni stopień trudności, dostosowany do możliwości naszych uczniów. Korzystając z AI, należy robić to mądrze, odpowiedzialnie oraz świadomie. Powinniśmy także uważać, aby nie uzależnić się od technologii. AI powinna być jedynie wsparciem, z którego korzystamy rozważnie i odpowiedzialnie.

Nowoczesna technologia nie zastąpi ludzkiej empatii, doświadczenia pedagogicznego ani – w przypadku początkujących nauczycieli – wsparcia starszych koleżanek i kolegów oraz umiejętności rozumienia kontekstu. Podczas korzystania ze sztucznej inteligencji nie możemy rezygnować z refleksji nad przygotowanym materiałem, sprawdzenia, czy we właściwym kierunku podążają zaplanowane zajęcia bądź osiągnięty zostanie zamierzony przez nas cel.

Niejednokrotnie jest tak, że nauczyciel ma pomysł na ciekawą realizację zajęć z uczniami, nie ma jednak koncepcji, jak taką lekcję czy wydarzenie zrealizować. Tu także z pomocą przyjdzie mu sztuczna inteligencja. Zaplanuje pracę, przygotuje scenariusz oraz, jeśli jest taka potrzeba, przygotuje materiały do tych zajęć.

Aby właściwie wykorzystać AI, musimy posiadać umiejętność krytycznego myślenia, trafnego formułowania pytań, sprawdzania źródeł i rozumienia mechanizmów działania narzędzi, z których korzystamy.

## **Jak nauczyciel powinien przygotować się do pracy, zanim skorzysta z AI?**

Wśród działań nauczyciela, które powinien przedsięwziąć przed korzystaniem z narzędzi AI dla celów edukacyjnych, bez wątpienia należy wymienić:

1. Zapoznanie się z podstawowymi kierunkami realizacji polityki oświatowej państwa, ogłoszonymi przez Ministra Edukacji Narodowej na dany rok szkolny.
2. Przeanalizowanie podstawy programowej wychowania przedszkolnego i/lub kształcenia ogólnego, w tym ustalenie, które z celów kształcenia i treści nauczania zamierza realizować. Jeśli jest taka potrzeba, analiza ta dotyczyć powinna różnych przedmiotów.
3. Zredagowanie uogólnionego problemu i tematyki zajęć oraz ustalenie pytań skierowanych do narzędzi wykorzystujących sztuczną inteligencję.
4. Wskazanie, jakich materiałów dydaktycznych nauczyciel oczekuje jako efektu końcowego, np.: scenariusza zajęć z zadaniami i kluczem odpowiedzi do zadań bądź zadań na konkurs z odpowiedziami czy też scenariusza uroczystości.
5. Podjęcie decyzji o tym, czy zadaniem narzędzia AI będzie wyszukanie materiałów źródłowych, np.: danych z roczników statystycznych, map czy ilustracji.

## **Wybrane narzędzia AI, które mogą być przydatne w pracy nauczyciela**

Jak słusznie podkreślają autorzy bloga Smodin we wpisie „Najlepsze narzędzie AI dla nauczycieli w celu usprawnienia nauki w klasie”<sup>1</sup>, skuteczne wykorzystanie sztucznej inteligencji w szkole zaczyna się od świadomego wyboru odpowiednich rozwiązań. Nauczyciele powinni zwracać uwagę nie tylko na zgodność narzędzi z ich celami dydaktycznymi, lecz także na to, czy są one łatwe do wdrożenia i obsługi. Przy podejmowaniu decyzji warto też rozważyć, jakie dodatkowe możliwości daje dana platforma – od personalizacji nauki, przez analizę wyników, po ułatwienia w codziennych obowiązkach administracyjnych. Dzięki temu AI może realnie wspierać rozwój uczniów i usprawniać pracę nauczyciela.

Liczba narzędzi wykorzystujących sztuczną inteligencję, które nauczyciele mogą i powinni stosować w swojej codziennej pracy, jest ogromna. Warto na przykład wymienić:

- ChatGPT: wykorzystuje sztuczną inteligencję do generowania odpowiedzi na pytania i prowadzenia rozmów w sposób przypominający dialog z drugim człowiekiem;
- Microsoft Copilot: asystent AI, który wesprze nauczycieli w tworzeniu kompleksowych planów lekcji. Dzięki temu narzędziu mogą oni szybko wygenerować szczegółowy konspekt zajęć dostosowany do poziomu uczniów i tematu;
- CURIPOD: może posłużyć do projektowania interaktywnej prezentacji;
- Turnitin: narzędzie do wykrywania plagiatów;
- Quizizz: (znane nauczycielom narzędzie do tworzenia quizów) obecnie oficjalnie zmienia nazwę na WayGround – jest to nowa wersja platformy, wspomagana przez AI;
- Google Classroom: pomaga usprawnić nauczycielom zarządzanie klasą, przesyłanie zadań i ocenianie, pomaga nauczycielom organizować zasoby i skutecznie komunikować się z uczniami, posiada zestaw narzędzi – Gemini – opartych na generatywnej sztucznej inteligencji, przeznaczonych dla nauczycieli.

<sup>1</sup> Smodin (2024), Best AI Tool for Teachers To Enhance Classroom Learning, <https://smodin.io/blog/pl/best-ai-tool-for-teachers-to-enhance-classroom-learning/> [dostęp: 11.08.2025]

# Jak przygotować scenariusz interdyscyplinarnych zajęć z zastosowaniem Microsoft Copilot?

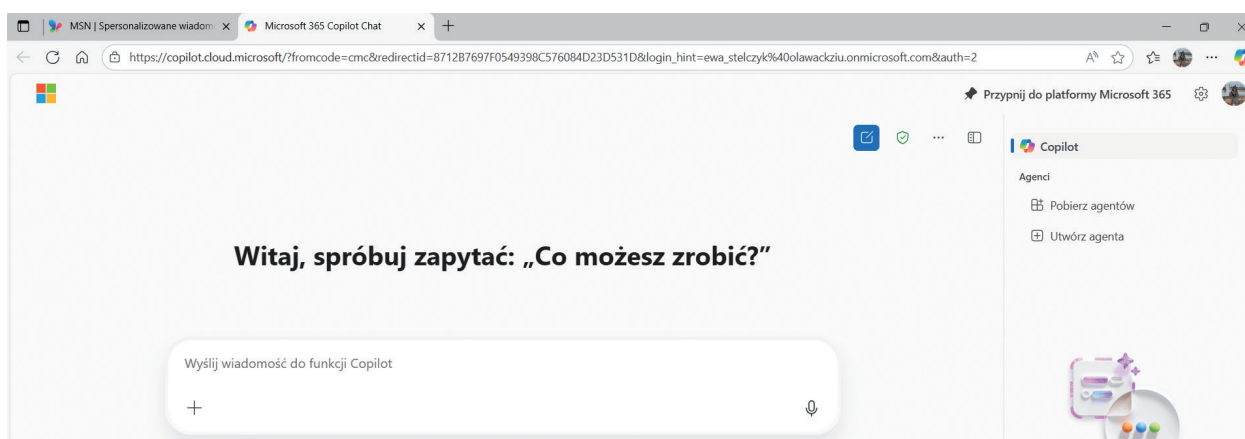
Microsoft Copilot jest narzędziem, które może wspierać nauczyciela w jego codziennych zadaniach edukacyjnych. Jest on zaawansowanym asystentem wykorzystującym sztuczną inteligencję. Zastosowanie Microsoft Copilot w pracy pedagogicznej zwiększa produktywność i kreatywność nauczyciela. Ułatwia mu tworzenie oraz edycję przygotowanych materiałów: dokumentów czy prezentacji. Pomaga w wyszukiwaniu treści, dostarcza nowych pomysłów na przeprowadzenie zajęć. Microsoft Copilot, podpowiadając, jak opracować scenariusz zajęć, zadba także o to, aby stworzyć plan pracy podczas lekcji, służący sprawnemu zarządzaniu czasem przeznaczonym na poszczególne etapy pracy z uczniami. Microsoft Copilot ma dostęp do informacji z całego świata, nie ma dla niego znaczenia, w jakim języku są one zapisane.



Jeśli chcemy skorzystać z tego narzędzia, możemy bezpłatnie użyć zintegrowanej z nim przeglądarki Microsoft Edge. Warto zatem uruchomić Microsoft Copilot z jej poziomu. Jeśli nie zainstalowaliśmy Microsoft Edge na naszym komputerze wcześniej, możemy pobrać instalacyjną wersję, którą znajdziemy na stronie internetowej: [developer.microsoft.com](https://developer.microsoft.com)<sup>2</sup>.

Po uruchomieniu przeglądarki (patrz Rys. 1) należy:

1. Kliknąć ikonę Microsoft Copilot w prawym górnym rogu, aby otworzyć pasek boczny.
2. W pasku bocznym mamy możliwość wpisywania pytań lub poleceń.
3. Microsoft Copilot daje także inne możliwości, takie jak: przygotowanie podsumowywania, generowanie obrazów, przepisywanie tekstu i wiele innych, w zależności od kontekstu.
4. Możemy pracować tu na przygotowanym wcześniej pliku albo też generować nowe dokumenty.



Rys.1. Ekran powitalny aplikacji Copilot

W naszym przypadku chcielibyśmy zlecić AI przygotowanie scenariusza zajęć interdyscyplinarnych dla uczniów szkoły ponadpodstawowej, podczas których realizować będziemy treści z podstawy programowej na poziomie podstawowym z matematyki (XII.2), geografii, (I.5 i III.6) i informatyki (II.2 c).

Oczywiście nie musimy posługiwać się numeracją treści nauczania z podstawy programowej. Możemy pytanie sformułować także opisowo. Warto jednak świadomie dobierać tematykę i treść zajęć oraz zakres realizowanego materiału.

<sup>2</sup> <https://developer.microsoft.com/pl-pl/microsoft-edge/> [dostęp 11.08.2025]

Wpisujemy zatem polecenie w oknie dialogowym Microsoft Copilot (patrz Rys. 2):

*Proszę o przygotowanie scenariusza zajęć interdyscyplinarnych dla uczniów szkoły ponadpodstawowej, podczas których realizować będziemy treści z podstawy programowej na poziomie podstawowym z matematyki (XII.2), geografii, (I.5 i III.6) i informatyki (II.2 c).*



Rys. 2. Okno dialogowe Microsoft Copilot

Otrzymujemy propozycję scenariusza i mamy możliwość pobrania go.

## I. Scenariusz zajęć wygenerowany przez Microsoft Copilot

**Temat zajęć:**

**Analiza danych klimatycznych – temperatura i opady w wybranych regionach świata**

**Przedmioty i treści podstawy programowej:**

- **Matematyka (XII.2)** – przedstawianie danych za pomocą wykresów, obliczanie średnich, odchyleń, analiza danych statystycznych.
- **Geografia (I.5, III.6)** – klimat świata, czynniki wpływające na klimat, analiza danych klimatycznych.
- **Informatyka (II.2c)** – przetwarzanie danych w arkuszu kalkulacyjnym, tworzenie wykresów, podstawy analizy danych.

**Cele zajęć:**

- Uczniowie potrafią pozyskiwać i analizować dane klimatyczne.
- Uczniowie potrafią przedstawić dane w formie wykresów i tabel.
- Uczniowie rozumieją zależności między położeniem geograficznym a warunkami klimatycznymi.
- Uczniowie potrafią korzystać z narzędzi informatycznych do analizy danych.

**Czas trwania: 2 x 45 minut**

**Przebieg zajęć:**

### 1. Wprowadzenie (15 minut)

- Krótkie przypomnienie typów klimatów na świecie.
- Omówienie pojęć: średnia arytmetyczna, odchylenie standardowe, wykres liniowy/słupkowy.
- Przedstawienie celu zajęć: analiza danych klimatycznych z różnych regionów.

## 2. Praca z danymi (30 minut)

- Uczniowie otrzymują zestaw danych klimatycznych (średnie miesięczne temperatury i opady) dla 3 miast z różnych stref klimatycznych (np. Warszawa, Kair, Rio de Janeiro).
- W arkuszu kalkulacyjnym (np. Excel lub Google Sheets) uczniowie:
  - o Wprowadzają dane.
  - o Obliczają średnie roczne temperatury i sumy opadów.
  - o Tworzą wykresy porównawcze (temperatura i opady).
  - o Obliczają odchylenie standardowe dla temperatur.

## 3. Analiza i interpretacja (30 minut)

- Uczniowie analizują wykresy i dane:
  - o Jakie są różnice w klimacie między miastami?
  - o Jak położenie geograficzne wpływa na klimat?
  - o Które miasto ma najbardziej stabilną temperaturę?
- Dyskusja w grupach i prezentacja wniosków.

## 4. Podsumowanie (15 minut)

- Refleksja nad wykorzystaniem matematyki i informatyki w analizie geograficznej.
- Omówienie możliwości dalszego wykorzystania danych klimatycznych (np. w kontekście zmian klimatu).

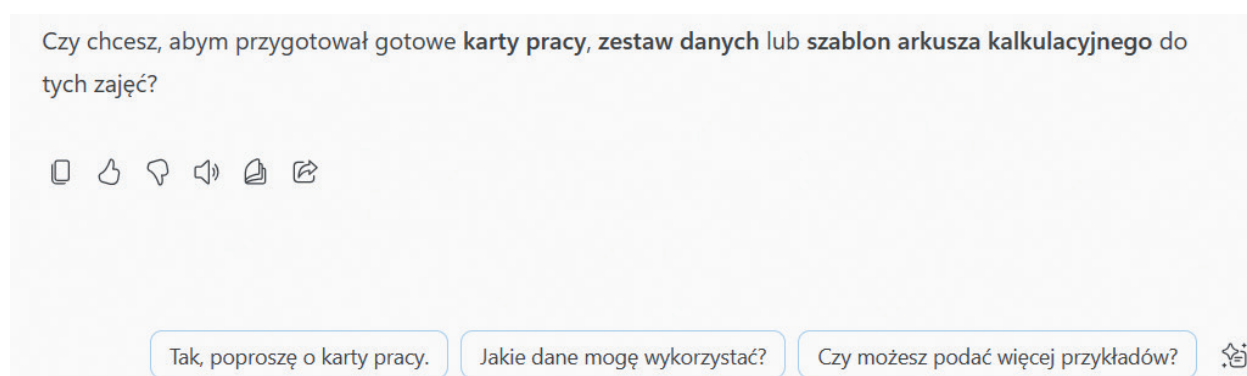
### Materiały i narzędzia:

- Komputery z dostępem do arkusza kalkulacyjnego.
- Zestaw danych klimatycznych (można pobrać z serwisów takich jak [climate-data.org](https://climate-data.org)).
- Karty pracy z pytaniami pomocniczymi.

### Propozycje rozszerzenia:

- Wprowadzenie danych z ostatnich 30 lat i analiza zmian klimatycznych.
- Tworzenie interaktywnych dashboardów<sup>3</sup> w Excelu.
- Porównanie danych z różnych kontynentów.

Narzędzie wskaże także opcję stworzenia dodatkowych materiałów (patrz Rys. 3).



Rys. 3: Okno dialogowe Microsoft Copilot

Mamy możliwość wygenerowania i pobrania zaproponowanych dokumentów.

<sup>3</sup> Dashboard w Microsoft Excel to interaktywny raport, który przedstawia najistotniejsze dane w sposób wizualny. Wykorzystuje wykresy, tabele przestawne, fragmentatory i inne obiekty Excela do prezentacji informacji w sposób czytelny i atrakcyjny. Pozwala na szybki przegląd i analizę zgromadzonego materiału. Użytkownik może operować danymi zmieniając parametry ich wyświetlania.

## II. Wygenerowana przez Microsoft Copilot karta pracy oraz instrukcja analizy danych klimatycznych

---

### Karta pracy – Analiza danych klimatycznych

#### 1. Dane klimatyczne

Wprowadź średnie miesięczne temperatury i sumy opadów dla trzech miast:

Warszawa, Kair, Rio de Janeiro.

Skorzystaj z dostępnych źródeł danych lub otrzymanego zestawu danych.

Miasto 1: \_\_\_\_\_

Miasto 2: \_\_\_\_\_

Miasto 3: \_\_\_\_\_

#### 2. Obliczenia

Dla każdego miasta oblicz:

- Średnią roczną temperaturę
- Roczną sumę opadów
- Odchylenie standardowe temperatur

Zapisz obliczenia poniżej:

Miasto 1: \_\_\_\_\_

Miasto 2: \_\_\_\_\_

Miasto 3: \_\_\_\_\_

#### 3. Wykresy

Na podstawie danych stwórz wykresy porównawcze (np. wykresy liniowe lub słupkowe) dla temperatur i opadów. Wklej je poniżej lub dołącz jako osobny plik.

Miejsce na wykresy: \_\_\_\_\_

#### 4. Analiza i wnioski

Odpowiedz na pytania:

- Jakie są różnice w klimacie między miastami?
- Jak położenie geograficzne wpływa na klimat?
- Które miasto ma najbardziej stabilną temperaturę?

Odpowiedzi:

---

---

---

#### 5. Refleksja

Jakie wnioski wyciągasz z analizy danych klimatycznych?

Jakie znaczenie mają takie analizy w kontekście zmian klimatu?

---

---

## Instrukcja analizy danych klimatycznych

Poniższa instrukcja pomoże Ci krok po kroku przeanalizować dane klimatyczne z wykorzystaniem pustego arkusza kalkulacyjnego. Wykonaj wszystkie kroki, aby uzyskać pełną analizę temperatur i opadów dla wybranych miast.

### Krok 1: Wprowadzenie danych

1. Otwórz pusty arkusz kalkulacyjny.
2. Wprowadź nazwy miesięcy w pierwszej kolumnie (od stycznia do grudnia).
3. W kolejnych kolumnach wpisz średnie miesięczne temperatury i opady dla każdego miasta.

Przykład:

| Miesiąc | Warszawa - Temp | Warszawa - Opady | Kair - Temp | Kair - Opady | Rio - Temp | Rio - Opady |

### Krok 2: Obliczenia statystyczne

1. Oblicz średnią roczną temperaturę dla każdego miasta.
2. Oblicz sumę rocznych opadów dla każdego miasta.
3. Oblicz odchylenie standardowe temperatur dla każdego miasta.

Wskazówka:

Skorzystaj z funkcji arkusza kalkulacyjnego, takich jak ŚREDNIA(), SUMA(), ODCH.STANDARDOWE().

### Krok 3: Tworzenie wykresów

1. Utwórz wykres liniowy przedstawiający zmiany temperatur w ciągu roku dla każdego miasta.
2. Utwórz wykres słupkowy przedstawiający miesięczne opady dla każdego miasta.
3. Zadbaj o czytelne podpisy osi i legendę wykresu.

### Krok 4: Analiza i prezentacja wyników

1. Porównaj dane klimatyczne między miastami.
2. Zastanów się, jak położenie geograficzne wpływa na klimat.
3. Odpowiedz na pytania:
  - Które miasto ma najbardziej stabilną temperaturę?
  - Gdzie występują największe opady?
  - Jakie zależności można zauważyć między temperaturą a opadami?

### III. Zestaw danych

Mamy możliwość pobrania także arkusza kalkulacyjnego z danymi (patrz Rys. 4), na podstawie którego możemy wydrukować materiały dla uczniów, tj. przygotować dla nich tabelę z wybranymi przez nas informacjami.

|    | A                | B                    | C                     | D                | E                 | F               | G                | H |
|----|------------------|----------------------|-----------------------|------------------|-------------------|-----------------|------------------|---|
| 1  | Miesiąc          | Warszawa - Temp (°C) | Warszawa - Opady (mm) | Kair - Temp (°C) | Kair - Opady (mm) | Rio - Temp (°C) | Rio - Opady (mm) |   |
| 2  | Styczeń          | -2                   | 30                    | 14               | 5                 | 26              | 130              |   |
| 3  | Luty             | -1                   | 25                    | 15               | 3                 | 26              | 110              |   |
| 4  | Marzec           | 4                    | 35                    | 17               | 2                 | 25              | 100              |   |
| 5  | Kwiecień         | 9                    | 40                    | 21               | 1                 | 24              | 90               |   |
| 6  | Maj              | 14                   | 55                    | 25               | 0                 | 22              | 80               |   |
| 7  | Czerwiec         | 18                   | 70                    | 28               | 0                 | 21              | 70               |   |
| 8  | Lipiec           | 20                   | 75                    | 30               | 0                 | 21              | 60               |   |
| 9  | Sierpień         | 19                   | 65                    | 30               | 0                 | 22              | 50               |   |
| 10 | Wrzesień         | 15                   | 50                    | 28               | 0                 | 22              | 60               |   |
| 11 | Październik      | 10                   | 45                    | 24               | 1                 | 23              | 90               |   |
| 12 | Listopad         | 4                    | 40                    | 20               | 3                 | 24              | 100              |   |
| 13 | Grudzień         | 0                    | 35                    | 16               | 4                 | 25              | 120              |   |
| 14 | Średnia temp.    | 9,166666667          |                       | 22,33333333      |                   | 23,41666667     |                  |   |
| 15 | Suma opadów      |                      | 565                   |                  | 19                |                 | 1060             |   |
| 16 | Odchylenie temp. | 8,066015501          |                       | 5,959458995      |                   | 1,831955405     |                  |   |
| 17 |                  |                      |                       |                  |                   |                 |                  |   |

Rys. 4. Pobrany zestaw danych

### IV. Arkusz pracy dla ucznia

Microsoft Copilot proponuje nam także, aby skorzystać z pustego arkusza (Patrz Rys. 5), do którego uczniowie wpiszą dane przygotowane przez nauczyciela.

|    | A                           | B                           | C                     | D                       | E                 | F                                 | G                           |
|----|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| 1  |                             | Warszawa - Temperatura (°C) | Warszawa - Opady (mm) | Kair - Temperatura (°C) | Kair - Opady (mm) | Rio de Janeiro - Temperatura (°C) | Rio de Janeiro - Opady (mm) |
| 2  | Styczeń                     |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 3  | Luty                        |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 4  | Marzec                      |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 5  | Kwiecień                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 6  | Maj                         |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 7  | Czerwiec                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 8  | Lipiec                      |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 9  | Sierpień                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 10 | Wrzesień                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 11 | Październik                 |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 12 | Listopad                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 13 | Grudzień                    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 14 | Średnia temperatura (°C)    |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 15 | Suma opadów (mm)            |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |
| 16 | Odchylenie standardowe (°C) |                             |                       |                         |                   |                                   |                             |

Rys. 5. Pusty arkusz kalkulacyjny do pracy dla ucznia

Funkcjonalność Microsoft Copilot powoduje, że użytkownik może zadawać dodatkowe pytania, zmodyfikować, doprecyzować informację tak, aby efekt końcowy był dla niego zadowalający. Warto zlecić Microsoft Copilot przygotowanie wersji edytowalnej wygenerowanych plików z możliwością wprowadzania zmian, by nauczyciel miał wpływ na zawartość dokumentów i dostosowanie materiałów do własnych potrzeb, a także potrzeb swoich uczniów.

Należy także przeanalizować przygotowany scenariusz zajęć i otrzymane materiały, aby upewnić się, że zostały opracowane zgodnie z ustalonymi wytycznymi. Na przykładzie przedstawionego powyżej wygenerowanego scenariusza, można zauważyć, że uczniowie dostali za zadanie obliczenie odchylenia standardowego<sup>4</sup>. Jednakże pojęcie odchylenia standardowego nie występuje w podstawie programowej matematyki na poziomie podstawowym. Nauczyciel musi zatem rozważyć, czy nie byłoby zasadnym wprowadzenie tego pojęcia i objaśnienie jego potocznego sensu. Przy okazji można również omówić rodzaje średnich stosowanych w statystyce i uzasadnić, dlaczego w tym przypadku stosujemy średnią arytmetyczną, a nie geometryczną czy harmoniczną. Wskazujemy w ten sposób na bogactwo narzędzi statystycznych, jak również na zagadnienie właściwego ich wykorzystania, adekwatnego do badanego problemu. Tę decyzję, na tym etapie, podejmuje nauczyciel.

Microsoft Copilot oprócz typowych materiałów, które przygotowuje, proponuje także inne – takie, które jego zdaniem mogłyby pomóc w prowadzeniu zajęć, uatrakcyjnić je, byłyby przydatne uczniom lub nauczycielowi. Otrzymujemy listę propozycji od AI. Oprócz karty pracy, instrukcji i arkusza kalkulacyjnego, możemy wzbogacić zajęcia interdyscyplinarne o różnorodne materiały, które zwiększą zaangażowanie uczniów i pogłębią ich zrozumienie.

Oto propozycje:

## **Materiały dydaktyczne i pomocnicze**

### **1. Prezentacja multimedialna (np. PowerPoint)**

- Wprowadzenie do klimatu i jego typów.
- Przykłady danych klimatycznych z różnych regionów.
- Instrukcja obsługi arkusza kalkulacyjnego.
- Wizualizacje wykresów i map.

### **2. Mapa klimatyczna świata**

- Wersja drukowana lub interaktywna.
- Uczniowie mogą zaznaczać miasta i analizować ich położenie względem stref klimatycznych.

### **3. Quiz lub test interaktywny**

- Sprawdzenie wiedzy z geografii, matematyki i informatyki.
- Można użyć narzędzi takich jak Kahoot, Quizizz, Wordwall.

### **4. Infografiki**

- Przedstawiające zależności między temperaturą, opadami a szerokością geograficzną.
- Zmiany klimatyczne w ujęciu globalnym.

<sup>4</sup> Odchylenie standardowe jest miarą odchylenia danych od wartości średniej. W przypadku klimatu, wysoka wartość odchylenia standardowego oznacza dużą zmienność klimatu, czyli duży „rozrzut” wartości temperatur, opadów, jak również innych parametrów klimatycznych wokół ich wartości średnich. Niskie odchylenie standardowe natomiast wskazuje na większą stabilność klimatu w analizowanym okresie, czyli małą jego zmienność.

## 5. Film edukacyjny lub animacja

- Krótkie materiały wideo o klimacie, np. z serwisów edukacyjnych (YouTube EDU, TED-Ed).
- Można po nich przeprowadzić dyskusję.

## 6. Zadanie projektowe

- Uczniowie tworzą własne raporty klimatyczne dla wybranego miasta.
- Mogą wykorzystać dane historyczne i prognozy.

## 7. Konspekt dla nauczyciela

- Zawierający cele, przebieg, pytania pomocnicze, kryteria oceniania.

## Materiały wspierające kompetencje kluczowe

- **Krytyczne myślenie:** *analiza danych i wyciąganie wniosków.*
- **Kompetencje cyfrowe:** *praca z arkuszem kalkulacyjnym.*
- **Komunikacja:** *prezentacja wyników i dyskusja.*
- **Współpraca:** *praca w grupach nad analizą danych.*

# Podsumowanie

---

Przedstawione powyżej materiały wygenerowane przez sztuczną inteligencję są zgodne z przyjętymi założeniami określonymi w zadaniu. Pewnym odstępstwem może być propozycja obliczenia odchylenia standardowego, które nie figuruje w aktualnie obowiązującej podstawie programowej z matematyki. Należy jednak podkreślić, że edytowalna forma materiałów umożliwi nauczycielowi samodzielne podjęcie decyzji — czy pozostawić to zagadnienie w celu poszerzenia zakresu omawianych treści, czy też z niego zrezygnować.

Sztuczna inteligencja proponuje realizację zajęć w ramach dwóch jednostek lekcyjnych. Zaproprowany czas jest adekwatny do zakresu materiału i umożliwia jego pełną realizację w sposób efektywny oraz przemyślany.

Copilot jest narzędziem godnym polecenia, wspierającym pracę nauczyciela, charakteryzującym się intuicyjną obsługą i przejrzystą strukturą. Komunikacja z użytkownikiem przebiega sprawnie — narzędzie poprawnie interpretuje polecenia, a w razie potrzeby umożliwia ich doprecyzowanie oraz generowanie dodatkowych materiałów, również w alternatywnej formie, zgodnie z potrzebami dydaktycznymi autora.

Należy jednak podkreślić, że sztuczna inteligencja nigdy nie zastąpi relacji uczeń – nauczyciel. AI nie opiera się na emocjach ani empatii, które w relacjach międzyludzkich odgrywają kluczową rolę, lecz na analizie ogromnej liczby danych. Tylko człowiek jest w stanie zrozumieć indywidualne potrzeby drugiej osoby.

Nauczyciel w pracy z uczniem powinien w procesie edukacyjnym wykorzystywać nowoczesne technologie. Musi jednak robić to rozważnie i świadomie, w sposób odpowiedzialny i uważny. Nie można zapominać o tym, by postępować etycznie, z poszanowaniem prywatności oraz praw autorских. Korzystanie z AI nie zwalnia nauczyciela z refleksji nad otrzymanym materiałem, krytycznego myślenia, kontroli nad tym, jakie informacje zamierzał przekazać, jakie umiejętności zaplanował przećwiczyć podczas zajęć i w jakim kierunku powinna pójść prowadzona przez niego lekcja, czyli w jaki sposób powinno przebiegać zorganizowane przez niego wydarzenie edukacyjne. Powinien zawsze mieć na uwadze cel i efekt końcowy, jaki chce osiągnąć.

## Projekt interdyscyplinarny „Zielona wieża – mini ogród hydroponiczny”

Kształtowanie myślenia analitycznego, szczególnie w zakresie nauczania matematyki, wymaga kompleksowego podejścia. Interdyscyplinarność i rozwijanie umiejętności matematycznych w kształceniu ogólnym to klucz do udzielenia odpowiedzi na jakże często zadawane przez uczniów pytanie: „A do czego to mi się przyda?”. Dlatego istotne jest, aby nauczyciele matematyki wykorzystywali takie projekty interdyscyplinarne, które łączą matematykę z innymi przedmiotami. Uczeń musi zobaczyć praktyczne zastosowania i wzajemną korelację pomiędzy poszczególnymi dziedzinami nauki. Stąd też dobrym pomysłem staje się nowoczesny model nauczania – taki, który bierze pod uwagę rozwój młodych umysłów. Mowa tutaj o modelu STEAM.

STEAM to akronim od angielskich słów:

- **S:** *Science* (nauka),
- **T:** *Technology* (technologia),
- **E:** *Engineering* (inżynieria),
- **A:** *Arts* (sztuka),
- **M:** *Mathematics* (matematyka).

Opisywana metoda to zintegrowane podejście do edukacji, które wspiera rozwój umiejętności analitycznych, kreatywnych i rozwiązywanie problemów. Istotą tej metody jest interdyscyplinarność – uczniowie nie uczą się poszczególnych przedmiotów w izolacji, ale w ramach wspólnych projektów, które wymagają zastosowania wiedzy z wielu dziedzin równocześnie. Dzięki temu edukacja przestaje być zestawem niezależnych modułów, a staje się spójnym procesem poznawczym, odzwierciedlającym rzeczywiste mechanizmy funkcjonowania świata. Sposób ten brzmi wręcz idyllicznie, zawiera wszystko, co współczesna szkoła powinna oferować uczniowi. Pozostaje jednak problem, w jaki sposób przejść od tradycyjnego sposobu nauczania jedynie teorii do zintegrowanego nauczania teorii z praktyką i w jaki sposób zaimplementować to podejście w codziennej pracy nauczyciela.

W praktyce dydaktycznej podejście STEAM najczęściej realizowane jest w formie projektów edukacyjnych, które wymagają od uczniów współpracy, krytycznego myślenia, a także kompetencji technicznych i artystycznych. Wdrażanie modelu STEAM w szkolnej rzeczywistości wymaga przede wszystkim zmiany podejścia do projektowania zajęć i otwartości nauczycieli na współpracę międzyprzedmiotową. Istotne staje się tworzenie przestrzeni, w której uczniowie mogą eksperymentować, analizować, wyciągać wnioski oraz prezentować efekty swojej pracy. Projekty STEAM powinny łączyć wiedzę z praktyką, umożliwiając uczniom samodzielne poszukiwanie rozwiązań realnych problemów. W praktyce oznacza to realizację zadań projektowych, które wymagają nie tylko znajomości wzorów matematycznych czy też zasad fizyki, ale także kreatywnego myślenia, wyobraźni przestrzennej oraz umiejętności komunikacji i pracy w zespole. W codzienności szkolnej wdrażanie STEAM oznacza więc konieczność porzucenia sztywnych ram lekcyjnych na rzecz pracy zespołowej, interdyscyplinarnych warsztatów oraz wspólnego rozwiązywania problemów. Ważnym komponentem staje się także refleksja metodyczna – nauczyciel nie tylko przekazuje wiedzę, lecz również inspirowanie,

ruje i zachęca do zadawania pytań. Uczniowie, angażując się w kolejne etapy projektu, mogą rozwijać umiejętność krytycznego myślenia oraz samodzielnego formułowania wniosków. Współpraca między uczniami o różnych zainteresowaniach i predyspozycjach pozwala na wykorzystanie potencjału grupy, a różnorodność perspektyw staje się źródłem innowacyjnych rozwiązań. Kluczowe jest także, aby projekty realizowane w duchu STEAM były bliskie codziennym doświadczeniom młodych osób. Warto podkreślić, że skuteczna realizacja STEAM wymaga nie tylko zmiany sposobu prowadzenia zajęć, lecz także odpowiednich warunków organizacyjnych oraz wsparcia ze strony całej społeczności szkolnej. Pomimo tego, że kluczową rolę odgrywa tu infrastruktura, dostęp do narzędzi, materiałów, przestrzeni do eksperymentowania i technologii cyfrowych, które pozwalają uczniom na twórcze działania i praktyczne testowanie pomysłów, to w realiach polskiej szkoły możemy pracować metodą projektu, sukcesywnie wprowadzając cechy metody STEAM.

Zanim dojdziemy do wyzwań, które mają przed sobą nauczyciele pracujący międzyprzedmiotowo, zastanówmy się, jaka powinna być szkoła, która umożliwi nauczycielom wprowadzanie metody projektu. Na pewno musi to być szkoła otwarta na współpracę z lokalnym środowiskiem – instytucjami kultury, uczelniami czy firmami – dzięki czemu projekty są osadzone w środowisku praktycznym, a wdrażane rozwiązania są przydatne w życiu codziennym będącym otoczeniem społecznym uczniów. Takie podejście nie tylko uatrakcyjni codzienną naukę, lecz również sprzyja rozwijaniu postaw innowacyjnych i przedsiębiorczych. Uczniowie uczą się, jak realizować pomysły, przekształcając je w realne działania, a niepowodzenia traktować jako naturalny etap procesu twórczego, z którego również płyną cenne lekcje. Dzięki temu nauka nabiera praktycznego wymiaru i przestaje być oderwana od rzeczywistości. Uczniowie mogą badać tematy związane z ekologią, nowymi technologiami czy kulturą, ucząc się nie tylko teorii, ale również odpowiedzialności i sprawczości. Jak jest zadanie nauczyciela realizującego projekty? Jak podkreślają Trilling i Fadel, uczenie się oparte na podejściu zorientowanym na ucznia, w którym nauczyciel pełni rolę przewodnika, sprzyja wzrostowi motywacji oraz rozwija kluczowe kompetencje XXI wieku, takie jak współpraca i kreatywność<sup>1</sup>. Charakterystycznym elementem metody STEAM jest włączenie sztuki i działań twórczych jako równorzędnego komponentu edukacyjnego. Integracja elementów artystycznych – np. projektowania graficznego, muzyki, ruchu czy narracji wizualnej – sprzyja nie tylko rozwojowi wyobraźni, ale również umożliwia głębsze zrozumienie treści naukowych poprzez wizualizację i ekspresję emocjonalną. Freeman i inni piszą o tym, iż dowody sugerują, że działania oparte na współpracy mogą zwiększać skuteczność uczenia się ukierunkowanego na ucznia w porównaniu z tradycyjną instrukcją i poprawiać trwałość wiadomości<sup>2</sup>. Jednym z kluczowych założeń metody STEAM jest przeniesienie akcentu z nauczania opartego na pamięciowym opanowywaniu faktów na rozwijanie zdolności do praktycznego stosowania wiedzy w nauczaniu problemowym. Proces dydaktyczny opiera się tu na pytaniach otwartych, zadaniach badawczych oraz eksperymentowaniu, co wymusza na uczniach konieczność samodzielnego dochodzenia do rozwiązań. Według K. Cook i innych: „Celem jest umiejscowienie uczniów w roli ekspertów motywowanych współczuciem prowadzącym do działania, zamiast postrzegania ich jedynie jako odbiorców informacji<sup>3</sup>.”

<sup>1</sup> Trilling, B., Fadel, C. (2009), *21st century skills. Learning for life in our times*, San Francisco: Jossey-Bass/Wiley. [https://ardian.id/wp-content/uploads/2018/10/21st\\_Century\\_Skills\\_Learning\\_for\\_Life\\_in\\_Our\\_Times\\_\\_\\_\\_2009-3.pdf](https://ardian.id/wp-content/uploads/2018/10/21st_Century_Skills_Learning_for_Life_in_Our_Times____2009-3.pdf) [dostęp 30.09.2025]

<sup>2</sup> Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., i in. (2014), *Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 111(23), 8410–8415. <http://www.pnas.org/content/111/23/8410.full.pdf> [dostęp 30.09.2025]

<sup>3</sup> Cook, K. L., Cox, R., Edelen, D. i in. (2025), *Elementary Student Perspectives on STEAM Education. "Education Sciences"*, 15(6). <https://www.mdpi.com/2227-7102/15/6/689> [dostęp 30.09.2025]

Modele STEAM stają się coraz bardziej popularne. Poniżej przedstawię pomysł, który wykorzystuję w pracy, a inspirację zaczerpnęłam ze szkoleń w ramach programu ERASMUS+. Jest to projekt, który można nazwać: „Zielona wieża – mini ogród hydroponiczny”. Projekt polega na zbudowaniu wieży hydroponicznej i przeprowadzenie uprawy roślin jadalnych. Projekt ma na celu pokazanie uczniom, jak nowoczesne technologie mogą wspierać zrównoważone rolnictwo i ochronę środowiska. Jaki to ma związek ze STEAM?

**Science:** Uczniowie poznają zasady wzrostu roślin bez gleby, rolę składników odżywczych oraz znaczenie światła i wody w procesie fotosyntezy.

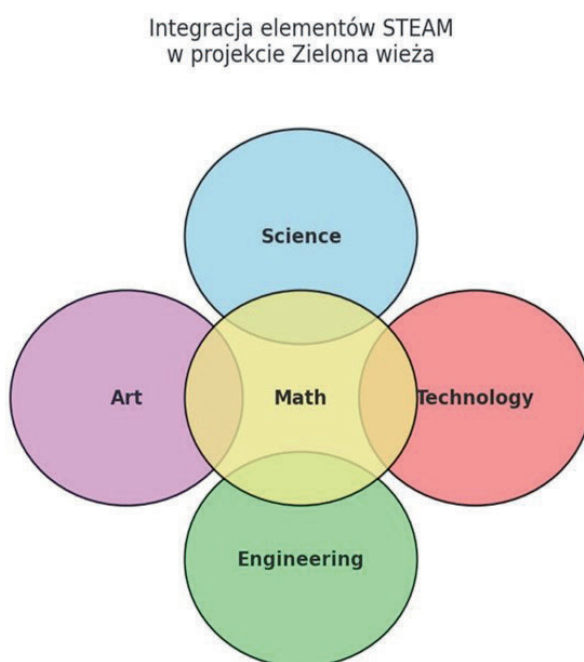
**Technology:** Uczniowie korzystają z prostych rozwiązań technicznych, takich jak pompka akwariowa czy alternatywne źródła światła LED, aby zapewnić roślinom odpowiednie warunki wzrostu.

**Engineering:** Uczniowie samodzielnie konstruują działający system hydroponiczny, łącząc butelki PET w wieżę, projektując przepływ wody i stabilność całej konstrukcji.

**Arts:** Jest obecny w fazie projektowej i estetycznej – młodzież dekoruje butelki, nadaje im atrakcyjną formę i wprowadza elementy wizualne, które sprawiają, że projekt staje się nie tylko praktyczny, lecz także ciekawy wizualnie.

**Math:** Uczniowie obliczają objętości pojemników, proporcje roztworu odżywczego, a także zużycie wody w systemie w skali tygodnia, co uczy ich praktycznego zastosowania matematyki w życiu codziennym.

Dzięki temu projekt nie tylko integruje wszystkie elementy STEAM, ale także rozwija u uczniów krytyczne myślenie, kreatywność i świadomość ekologiczną, pokazując, że nauka może być jednocześnie użyteczna i inspirująca. Schemat integracji przedstawionych tutaj elementów STEAM pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Schemat integracji elementów STEAM. Opracowanie własne.

# Przebieg projektu

Do zbudowania jednej wieży potrzeba:

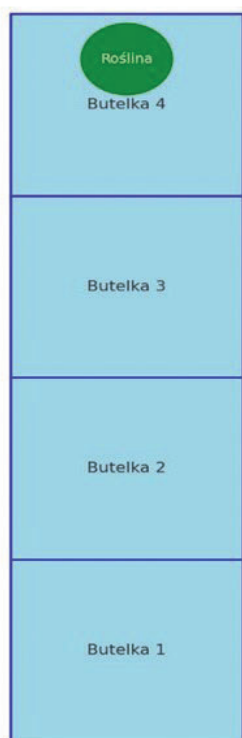
- butelki plastikowe (PET 1,5 l – min. 3–4 sztuki),
- nożyczki, nożyk, klej na gorąco lub taśma klejąca,
- szpagat lub rurki plastikowe (do przepływu wody),
- mała pompka akwariowa (opcjonalnie) lub możliwość podlewania ręcznego,
- kamyczki, keramzyt albo wata jako podłoże,
- nasiona łatwych do uprawy roślin (np. bazylia, rukola, mięta, sałata),
- woda + składniki odżywcze dla roślin (można użyć rozcieńczonego nawozu).

**Faza 1 – Projekt (Art + Math):** Uczniowie projektują wieżę z butelek PET ustawionych jedna nad drugą (np. odwrócone butelki jako doniczki). Obliczają pojemność każdej butelki oraz ilość wody potrzebną do całej wieży.

**Faza 2 – Budowa (Engineering + Science):** W celu wykonania wieży należy odciąć dna butelek i ułożyć je pionowo jedna w drugiej. Następnie w górnej butelce umieścić podłoże i nasiona. Woda z nawozem krąży – może spływać grawitacyjnie z góry na dół albo być pompowana do góry.

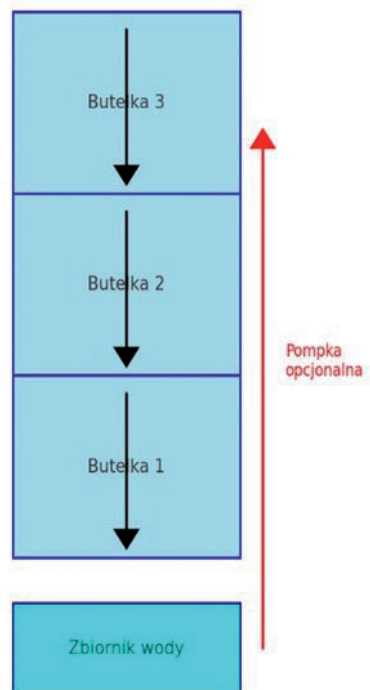
**Faza 3 – Testowanie (Science):** Należy zmierzyć, ile wody zużywa system w ciągu dnia oraz obserwować, jak szybko kiełkują rośliny. Następnie należy porównać wzrost roślin w systemie hydroponicznym i w ziemi (kontrola).

Schemat wieży hydroponicznej  
(z butelek PET)



Rys. 2. Schemat wieży hydroponicznej wykonanej z butelek PET. Opracowanie własne.

Obieg wody w wieży hydroponicznej



Rys. 3. Diagram obiegu wody. Opracowanie własne.

**Faza 4 – Estetyka i sztuka (Arts):** Uczniowie dekorują butelki – malują je, oklejają kolorowym papierem, tworzą napisy. Uczniowie mogą dodać elementy świetlne LED, aby wieża była też lampką-ozdobą.

**Faza 5 – Matematyka w praktyce (Math):** Obliczanie objętości pojemnika na wodę (walec – butelka). Obliczanie stężenia roztworu nawozu (np. 10 ml nawozu na 1 litr wody). Oszacowanie zużycia wody na tydzień.

Wskazówka: W trakcie przeprowadzania projektu sugeruję dołączyć tworzenie raportu ze wzrostu roślin (zdjęcia + wykresy w aplikacji MS Excel) oraz przeprowadzić konkurs na najlepszy system pod względem estetycznym lub efektywności w działaniu.

Na rys. 2 i 3 pokazano przykładowy schemat wieży hydroponicznej wykonanej z butelek PET oraz diagram obiegu wody.

## Podsumowanie i wnioski

Realizacja przedstawionego tutaj projektu potwierdza, że interdyscyplinarne podejście STEAM jest skutecznym narzędziem dydaktycznym łączącym wiedzę z praktyczną aktywnością uczniów. Proces projektowania, budowy i monitorowania wieży hydroponicznej umożliwia uczestnikom zastosowanie pojęć z biologii, chemii i fizyki w warunkach praktycznych, wdrożenie prostych rozwiązań technologicznych oraz wykorzystanie zasad inżynierskich przy konstruowaniu stabilnej i funkcjonalnej instalacji. Elementy artystyczne (projektowanie i dekoracja) oraz zastosowanie matematyki w obliczeniach objętości i stężeń wzbogacają doświadczenie, podkreślając wielowymiarowy charakter kompetencji rozwijanych w ramach STEAM.

Obserwacje prowadzone podczas pracy nad wieżą powodują, że uczniowie stają się aktywnymi podmiotami procesu poznawczego: samodzielnie formułują hipotezy, planują eksperymenty, rejestrują wyniki i interpretują poczynione obserwacje. Taka forma pracy sprzyja rozwijaniu krytycznego myślenia, umiejętności rozwiązywania problemów, współpracy w zespole oraz odpowiedzialności ekologicznej. Ponadto długotrwałe zaangażowanie w działanie – od etapu projektowania po testowanie i raportowanie – zwiększa motywację uczniów i przyczynia się do głębszego przyswojenia treści niż w przypadku izolowanych lekcji teoretycznych.

Podsumowując, projekt „Zielona wieża – mini ogród hydroponiczny” stanowi modelowy przykład efektywnego wdrożenia edukacji STEAM w warunkach szkolnych. Integracja poszczególnych komponentów STEAM w ramach jednego, praktycznego zadania pozwala nie tylko na budowę wiedzy merytorycznej, lecz także na kształtowanie kompetencji kluczowych dla XXI wieku oraz na rozwijanie postawy prośrodowiskowej. Z tego względu projekt zasługuje na kontynuację i adaptację w innych klasach i kontekstach edukacyjnych.

Rekomendacje dla dalszego rozwoju projektu:

1. Rozszerzenie wariantów eksperymentalnych — wprowadzić porównania różnych roztworów odżywczych, źródeł światła (różne typy LED) i typów podłoża w systemie hydroponicznym, aby pogłębić kompetencje badawcze i umiejętność analizy przyczynowo-skutkowej.
2. Integracja narzędzi cyfrowych — zastosować proste czujniki (np. wilgotności, pH, natężenia światła) oraz narzędzia do rejestracji i wizualizacji danych (arkusze kalkulacyjne, wykresy), co wzmocni umiejętności cyfrowe i analityczne uczniów.

3. Wzmocnienie współpracy międzyprzedmiotowej — formalnie powiązać projekt z programami nauczania przedmiotów, takich jak: biologia, fizyka, matematyka, informatyka i plastyka, aby podkreślić interdyscyplinarny charakter działań i umożliwić ocenę efektów z różnych perspektyw.
4. Analiza społeczno-ekonomiczna — zlecić uczniom zadania dotyczące oszacowania kosztów wdrożenia technologii hydroponicznych oraz oceny ich przydatności w środowisku lokalnym (np. ogrody szkolne, inicjatywy miejskie).
5. Promocja i upowszechnianie wyników — organizować szkolne wystawy, konkursy lub dni otwarte prezentujące gotowe wieże; dokumentacja (fotografie, raporty, wykresy) powinna być udostępniana w formie cyfrowej jako materiał dydaktyczny i inspiracja dla innych nauczycieli.

Wdrożenie powyższych rekomendacji pozwoli nie tylko zwiększyć wartość edukacyjną projektu „Zielona wieża – mini ogród hydroponiczny”, lecz także stworzy możliwości jego skalowania i adaptacji, co uczyni go trwałym elementem oferty dydaktycznej szkoły.

## „Misja na Marsa” – projekt interdyscyplinarny z elementami STEM

Latem 2025 r. miałam niezwykłą okazję uczestniczyć w międzynarodowym obozie edukacyjnym dla nauczycieli – „**Space Camp for Educators**”, organizowanym przez U.S. Space & Rocket Center w Huntsville w stanie Alabama (USA).

Podczas tego intensywnego tygodnia – w otoczeniu modeli rakiet, symulatorów NASA i niesamowitych ludzi z całego świata – miałam możliwość przyjrzenia się z bliska temu, jak w Stanach Zjednoczonych uczy się przedmiotów z obszaru **STEM** (*science, technology, engineering, math*). Byłam pod ogromnym wrażeniem podejścia, w którym teoria łączy się z praktyką, a kluczową rolę odgrywa **doświadczenie, współpraca oraz działanie projektowe**.

Szczególnie zainspirowała mnie aktywność polegająca na zbudowaniu lądownika i łazika, których celem było bezpieczne przetransportowanie „astronauty” – w tym przypadku zwykłego jajka. To proste, ale genialne ćwiczenie łączyło w sobie matematykę, technikę i przede wszystkim rozwijało umiejętności pracy zespołowej.

Pomyślałam, że warto to pokazać moim uczniom i właśnie dlatego przygotowałam ten interdyscyplinarny scenariusz zajęć, który z powodzeniem można zrealizować nie tylko na lekcjach matematyki, ale też przyrody, techniki, a nawet podczas godziny wychowawczej.

Są to zajęcia, które:

- uczą **planowania, liczenia, testowania i wyciągania wniosków**,
- rozwijają **logiczne myślenie i kreatywność**,
- uczą **współpracy i podziału zadań** w grupie,
- pokazują, jak fascynujące i użyteczne mogą być nauki ścisłe.

Mam nadzieję, że ta „Misja na Marsa” porwie Waszych uczniów równie mocno, jak porwała mnie – zarówno dosłownie, jak i edukacyjnie – podczas mojego kosmicznego lata w Alabamie.

### Misja na Marsa: Budujemy kapsułę ratunkową dla jajka-astronauty

**Przedmioty:** technika, przyroda, matematyka

**Grupa docelowa:** uczniowie klas V–VI

**Czas trwania:** 2 x 45 minut

**Forma pracy:** zespołowa, w grupach 3–4 osobowych

**Cele lekcji (językiem ucznia)**

Na lekcji:

- Dowiem się, jak chronić delikatne przedmioty przed uderzeniem.
- Zaprojektuję i wykonam kapsułę ratunkową dla jajka-astronauty.
- Będę pracować w zespole, planując i podejmując decyzje.
- Nauczę się planować budżet i przeliczać koszty.
- Przetestuję działanie mojego projektu i wyciągnę wnioski z testu.

## Kryteria sukcesu

Uczeń:

- Współtworzy funkcjonalną kapsułę i łązik, które chronią jajko.
- Poprawnie oblicza koszty materiałów w ramach budżetu.
- Bierze udział w testach kapsuły i analizuje wyniki.
- Współpracuje w grupie i bierze odpowiedzialność za swój wkład.
- Potrafi wskazać, co działało dobrze, a co można poprawić.

## Materiały (do wyboru przez grupy)

Każda grupa dostaje osobny **budżet: 100 punktów** na lądownik i **100 punktów** na łązik.

### Materiały do budowy lądownika:

| Materiał                      | Cena za sztukę (pkt) |
|-------------------------------|----------------------|
| Tektura (30x45 cm)            | bezpłatna            |
| Taśma klejąca 30 cm           | bezpłatna            |
| Torba foliowa (na spadochron) | 20                   |
| Waciki                        | 2                    |
| Taśma klejąca 1 cm            | 1                    |
| Słomka                        | 2                    |
| Sznurek 30 cm                 | 2                    |
| Bibuła                        | 5                    |
| Rajtuzy nylonowe (materiał)   | 15                   |

### Materiały do budowy łązika:

| Materiał               | Cena za sztukę (pkt) |
|------------------------|----------------------|
| Tektura (30x45 cm)     | bezpłatna            |
| Taśma klejąca 30 cm    | bezpłatna            |
| Torba foliowa          | 20                   |
| Tuba kartonowa (rolka) | 5                    |
| Patyk do szaszłyków    | 5                    |
| Kubek plastikowy       | 5                    |
| Wyłączki               | 10                   |
| Taśma klejąca 1 cm     | 1                    |
| Słomka                 | 2                    |
| Butelka plastikowa     | 20                   |
| Kółka (np. nakrętki)   | 5 każde              |

## Przebieg zajęć

### Część 1 (45 minut)

#### 1. Wprowadzenie (10 minut)

- Nauczyciel opowiada o misjach na Marsa i potrzebie ochrony ładunków.
- Uczniowie oglądają krótki film pokazujący lądowanie łazika NASA (np. Perseverance): <https://www.youtube.com/watch?v=4czjS9h4Fpg>; [https://www.youtube.com/watch?v=0db\\_8J9YETk](https://www.youtube.com/watch?v=0db_8J9YETk) – opadanie i lądowanie łazika.
- Wprowadzenie do zadania:  
„Waszym zadaniem jest zaprojektowanie lądownika i łazika, które bezpiecznie przetransportują jajka-astronautów na powierzchnię Marsa”.

#### 2. Projektowanie + plan budżetu (15 minut)

- Grupy losują/wybierają materiały w ramach 100 pkt budżetu na budowę lądownika i 100 pkt na stworzenie łazika.
- Wypełniają kartę budżetową (zał. 1).
- Podejmują decyzje dotyczące sposobów bezpiecznego transportu jajka-astronauty, tj. rozstrzygają, czy użyć spadochronu albo jak zamortyzować upadek.

#### 3. Budowa kapsuły i łazika (20 minut)

- Uczniowie budują swoje konstrukcje.
- Konstrukcja musi spełniać następujące wymagania:
  - Kapsuła nie może być większa niż 25x25 cm.
  - Jajko należy umieścić w woreczku śniadaniowym.
  - Jajko można wyjąć po lądowaniu.

### Część 2 (45 minut)

#### 4. Testy lądowania i zjazdu łazika (20 minut)

- Nauczyciel przygotowuje strefę testów: zrzut z wysokości + rampa.
- Grupy prezentują swoje projekty, zrzucają kapsuły, a następnie łaziki zjeżdżają po rampie (łaziki wyciągamy z kapsuły i spuszczaamy po rampie).
- Obserwujemy:
  - Czy jajko się nie uszkodziło/stłukło?
  - Czy kapsuła trafiła w wyznaczoną strefę?
  - Jak daleko przejechał łazik? (uczniowie dokonują pomiarów).

#### 5. Obliczenia matematyczne i przyznanie punktów (10 minut)

- Uczniowie obliczają:
  - Pozostały budżet (im mniej wydane, tym lepiej).
  - Celność lądowania: –1 pkt za każde 3 cm poza strefą.
  - Odległość przejazdu łazika: +1 pkt za każde 3 cm.
  - Ocena przetrwania jajka:
    - Jajko całe: +200 pkt
    - Jajko pęknięte, ale bez wycieku: +100 pkt
    - Jajko uszkodzone, z wyciekiem: 0 pkt

## 6. Refleksja i ewaluacja (15 minut)

- Grupy odpowiadają na następujące pytania:
  - Co działało najlepiej w naszej konstrukcji?
  - Co warto zmienić następnym razem?
  - Jakie siły działały na naszą kapsułę i łazik?
- Dyskusja z nauczycielem na tematy związane z zadaniem, np.: opór powietrza, grawitacja, siła uderzenia, amortyzacja.

### Matematyczne rozszerzenia (dla chętnych lub zdolniejszych uczniów):

- Obliczenie stosunku masy kapsuły do jej objętości.
- Porównanie budżetów i efektywności konstrukcji (np. cena za każdy przetrwany centymetr upadku).
- Zadania z zakresu obliczeń procentowych, np.: Ile procent budżetu zostało wydane na amortyzację?

### Informacje techniczne dla nauczyciela

Materiały dodatkowe dostępne na stronie [dodn.dolnyslask.pl](https://dodn.dolnyslask.pl) w sekcji Publikacje metodyczne lub bezpośrednio pod linkiem: <https://dodn.dolnyslask.pl/wp-content/uploads/ZdjeciaSpaceAcademy.zip>

- Zdjęcia z SpaceAcademy – fotografie łazików znajdujących się w muzeum w Huntsville Space Camp. Mogą posłużyć jako tło merytoryczne i inspiracja do rozmowy o rozwoju technologii kosmicznych. Filmy z zajęć dla edukatorów – krótkie nagrania prezentujące przykłady modeli łazików zbudowanych przez uczestników warsztatów. To praktyczna odpowiedź, jak można zorganizować podobne aktywności w klasie i jakie rozwiązania konstrukcyjne stosują inni nauczyciele.

Poniższe opisy są jedynie przykładowymi propozycjami rozwiązań technicznych. Mają one pomóc nauczycielowi w przygotowaniu zajęć i ułatwić wyobrażenie sobie konstrukcji urządzeń kosmicznych. Najważniejszym celem ćwiczenia nie jest wierne odtworzenie pokazanych przykładów, ale samodzielne poszukiwanie rozwiązań przez uczniów. To właśnie twórcze myślenie, testowanie różnych pomysłów i wyciąganie wniosków z prób są kluczowym elementem zajęć.

Propozycje konstrukcji rampy, spadochronu i łazika można wykorzystać jako inspirację albo punkt wyjścia, ale ostateczny kształt projektów powinien zależeć od decyzji zespołów uczniowskich.

### Rampa do testów łazika

- **Podstawa rampy:** długa deska, płyta sklejkowa albo duży kawałek grubej tektury falistej o długości około 100–120 cm i szerokości około 30 cm.
- **Podparcie rampy:** górny koniec deski oparty jest o stół, krzesło lub stos książek tak, aby uzyskać nachylenie około 20–30°. Dzięki temu łazik może swobodnie zjechać w dół.
- **Dolny koniec rampy:** oparty stabilnie o podłogę, bez podparcia, tworząc równy zjazd.
- **Linia startu:** na podłodze, tuż przy końcu rampy, wyznaczona taśmą malarską lub kredą. To punkt, od którego mierzy się drogę przejazdu łazika po wylądowaniu.
- **Strefa pomiaru:** za linią startu można zaznaczyć co 10 cm kolejne odcinki, aby łatwiej ocenić odległość przejazdu.

Wizualnie rampa przypomina **pochylą deskę**, której jeden koniec spoczywa na stole, a drugi na podłodze. Łazik umieszczony na górze zjeżdża w dół pod wpływem grawitacji, a jego przejazd mierzymy od linii startu znajdującej się na podłodze.

#### Przykładowy spadochron:

- **Czasza spadochronu:** wykonana z cienkiej folii (np. reklamówki, worka śniadaniowego) w kształcie **kwadratu lub koła** o wymiarach ok. 40×40 cm.
- **Linki mocujące:** do narożników (lub krawędzi koła) przyklejone są cztery równej długości sznurki (ok. 25 cm każdy).
- **Łączenie linek:** wszystkie linki zbiegają się w jednym punkcie i są przymocowane taśmą do kapsuły, w której znajduje się jajko-astronauta.
- **Kapsuła:** mała paczka z tektury, wewnątrz której znajduje się woreczek z jajkiem owiniętym materiałem amortyzującym (np. wacikami, bibułą).

Wyobrażenie: kiedy kapsuła spada, rozkłada się nad nią kolorowa folia spadochronu przypominająca parasol, a linki utrzymują kapsułę centralnie pod czaszą.

#### Przykładowy łazik

- **Podstawa łazika:** prostokątna platforma z tektury o wymiarach ok. 12×20 cm.
- **Oś kół:** dwa patyczki do szaszłyków lub cienkie drewniane pręciki, przechodzące przez słomki przyklejone w poprzek spodu podstawy.
- **Kółka:** plastikowe nakrętki (średnica 3–5 cm) lub inne lekkie elementy, nawiercone lub nakłute w środku i zamocowane na końcach osi.
- **Element dodatkowy:** na górze podstawy przyklejony kubeczek plastikowy lub kartonowa tuba jako miejsce na „ładunek” (np. jajko w kapsule).
- **Wygląd całości:** prosty wózek czterokołowy, którego zadaniem jest zjechać po rampie i przejechać jak najdalej po podłodze.

Wyobrażenie: konstrukcja przypomina mały wózek z kółkami z nakrętek i prostą platformą, na której można umieścić astronautę-jajko.

#### Przykład z kompletnymi obliczeniami

##### Założenia:

- Budżet ładownika: 100 pkt. Grupa zużyła 20 pkt na torbę foliową (spadochron), 8 pkt na słomki i sznurek, 2 pkt na waciki.  
→ Wydatki: 30 pkt. Pozostało: 70 pkt.
- Budżet łazika: 100 pkt. Grupa użyła: 2 × nakrętki (10 pkt), tuba kartonowa (5 pkt), 2 × słomki (4 pkt), taśma (1 pkt).  
→ Wydatki: 20 pkt. Pozostało: 80 pkt.

##### Test:

- Kapsuła trafiła 12 cm poza strefę → -4 pkt.
- Łazik przejechał 90 cm → +30 pkt.
- Jajko całe → +200 pkt.

##### Suma:

$$70 + 80 - 4 + 30 + 200 = 376 \text{ pkt.}$$

## Podsumowanie

---

Zajęcia „Misja na Marsa” pokazują, jak ogromny potencjał tkwi w pracy projektowej i nauce przez doświadczenie. To ćwiczenie nie tylko angażuje uczniów w twórcze działanie, ale też naturalnie łączy różne obszary wiedzy, w tym:

- **matematykę**, gdyż uczniowie obliczają budżet, porównują koszty materiałów, mierzą odległości i przeliczają punkty. Dzięki temu widzą praktyczne zastosowanie rachunków w sytuacji problemowej, a wyniki ich pracy mają realny wpływ na sukces misji.
- **technikę**, ponieważ budowa lądownika i łazika wymaga znajomości zasad konstruowania, wykorzystania prostych materiałów i narzędzi oraz testowania różnych rozwiązań. Uczniowie doświadczenia, że technika to dziedzina, w której liczy się pomysłowość, precyzja i współpraca.
- **przyrodę**, bowiem podczas testów uczniowie obserwują między innymi działanie oporu powietrza i naturę sił tarcia. Dzięki temu abstrakcyjne pojęcia stają się zrozumiałe, bo można je zaobserwować w praktyce.

Interdyscyplinarność tych zajęć sprawia, że uczniowie dostrzegają powiązania między naukami ścisłymi i technicznymi, a zdobyta wiedza przestaje być oderwana od rzeczywistości. „Misja na Marsa” to przykład tego, jak uczyć w sposób angażujący, rozwijający kompetencje STEAM i inspirujący do dalszych poszukiwań.

## Materiały potrzebne do lądownika:

|                             |                | Budżet: 100   |                 |
|-----------------------------|----------------|---------------|-----------------|
| Materiał                    | cena za sztukę | ilość użytych | całkowity koszt |
| tektura (30x45 cm)          | bezpłatny      | 1             | 0               |
| taśma klejąca 30 cm         | bezpłatny      | 1             | 0               |
| torba foliowa               | 20             |               |                 |
| waciki                      | 2              |               |                 |
| taśma klejąca 1 cm          | 1              |               |                 |
| słomka                      | 2              |               |                 |
| sznurek 30cm                | 2              |               |                 |
| bibuła                      | 5              |               |                 |
| materiał (rajtuzy nylonowe) | 15             |               |                 |
| RAZEM                       |                |               |                 |

## Materiały potrzebne do łazika:

|                                    |                | Budżet: 100   |                 |
|------------------------------------|----------------|---------------|-----------------|
| Materiał                           | cena za sztukę | ilość użytych | całkowity koszt |
| tektura (30x45 cm)                 | bezpłatny      | 1             | 0               |
| taśma klejąca 30 cm                | bezpłatny      | 1             | 0               |
| torba foliowa                      | 20             |               |                 |
| tuba tekturowa - rolka po papierze | 5              |               |                 |
| patyk do szaszłyków                | 5              |               |                 |
| kubek                              | 5              |               |                 |
| wykalaczki                         | 10             |               |                 |
| taśma klejąca 1 cm                 | 1              |               |                 |
| słomka                             | 2              |               |                 |
| butelka na wodę                    | 20             |               |                 |
| kółka                              | każde 5        |               |                 |
| RAZEM                              |                |               |                 |

## KRYTERIA OCENY

| KRYTERIA                         | OBLICZENIA                                                                                                                                                              | PRYZNANE PUNKTY |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Niewykorzystany budżet lądownika | 100 – wykorzystane kredyty lądownika (____) = (____)                                                                                                                    |                 |
| Niewykorzystany budżet łazika    | 100 – wykorzystane kredyty łazika (____) = (____)                                                                                                                       |                 |
| Celność lądowania                | -1 punkt za każde 3cm poza strefą lądowania (____)                                                                                                                      |                 |
| Odległość łazika                 | +1 punkt za każde 3 cm przebyty przez łazik (____)                                                                                                                      |                 |
| Przetrwanie                      | +200 punktów – Astronauta jest nietknięty<br>+100 punktów – Astronauta jest pęknięty, ale nie ma wycieku<br>Niepowodzenie misji – Astronauta jest uszkodzony, ma wyciek |                 |
| RAZEM                            |                                                                                                                                                                         |                 |

## „Sygnał z przyszłości” – scenariusz zajęć interdyscyplinarnych

Współczesne podejście do edukacji coraz częściej opiera się na metodach interdyscyplinarnych, które pozwalają uczniom postrzegać wiedzę jako spójny system, a nie zbiór oderwanych od siebie przedmiotów. Matematyka, jako uniwersalny język nauki, odgrywa w tym procesie szczególną rolę. Jej powiązania z innymi dziedzinami – takimi jak biologia, chemia, fizyka, informatyka, sztuka czy nawet język polski – umożliwiają budowanie głębszego zrozumienia pojęć i rozwijanie umiejętności analitycznego i logicznego myślenia w szerokim kontekście. W ramach tego podejścia coraz większą popularność zyskują nowoczesne metody dydaktyczne, w tym grywalizacja.

Grywalizacja (ang. gamification) od kilku lat zyskuje coraz większą popularność jako metoda wspierająca proces nauczania – zarówno w formie cyfrowej, jak i analogowej. Choć najczęściej kojarzona jest z wykorzystaniem nowoczesnych technologii, istotą grywalizacji nie jest sama technologia, lecz zastosowanie mechanizmów i elementów znanych z gier w kontekstach niezwiązanych z graniem. W przypadku edukacji oznacza to tworzenie takich warunków nauki, które angażują uczniów w sposób podobny do udziału w grze – poprzez wyzwania, nagrody, fabułę, współzawodnictwo czy jasno określone cele.

Jak zauważają Anuradhani, Yatigammana i Wijayarathna<sup>1</sup>, brak jednej, uniwersalnej definicji grywalizacji utrudnia jej skuteczne wdrażanie w różnych dziedzinach, w związku z czym przyjmują definicję opartą na procesie:

*Gamifikacja to celowy zbiór mechanizmów uczenia się i mechaniki gier mający na celu zapewnienie lepszego doświadczenia edukacyjnego dla uczących się, aby skutecznie osiągnąć zamierzone rezultaty uczenia się (ILO) poprzez cele gry<sup>2</sup>.*

Oznacza to, że grywalizacja nie jest tylko zabawą – jest przemyślaną strategią dydaktyczną, której celem jest poprawa efektywności nauczania poprzez zaangażowanie emocjonalne i poznawcze uczestników.

Grywalizacja bardzo dobrze wspiera interdyscyplinarne podejście do nauczania matematyki. Dzięki wykorzystaniu elementów gry, takich jak zadania oparte na logice, wyzwania wymagające obliczeń czy rozwiązywania problemów w kontekście fabularnym, uczniowie mają szansę dostrzec praktyczne zastosowanie matematyki w różnych dziedzinach życia. Grywalizacja pozwala na łączenie treści matematycznych z przyrodą, geografią, historią czy językiem polskim, tworząc spójne, angażujące i realistyczne sytuacje problemowe. Co istotne, nie tylko złożone projekty interdyscyplinarne zyskują dzięki takiemu podejściu – również pojedyncze zadania czy bloki tematyczne mogą zostać uatrakcyjnione poprzez wdrożenie mechanizmów grywalizacyjnych. Taka forma nauczania sprzyja rozwijaniu kompetencji matematycznych w sposób naturalny i zrozumiały dla uczniów, a jednocześnie wzmacnia ich motywację do nauki.

<sup>1</sup> Anuradhani, N. S., Yatigammana, K., Wijayarathna, G. (2024), *Defining gamification: a systematic literature review for developing a process-oriented definition*, *Journal of Multidisciplinary & Translational Research (JMTR)*, t. 9, nr 1, s. 66-85, <https://jmtr.sjoi.info/articles/104038/jmtrv9i1.6> [dostęp: 20.08.2025]

<sup>2</sup> Anuradhani, N. S., Yatigammana, K., Wijayarathna, G., *op. cit.*, s. 73, tłumaczenie własne.

Grywalizacja, szczególnie w formie zaprojektowanych zadań problemowych i sytuacji wymagających podejmowania decyzji, stanowi doskonale narzędzie wspierające rozwój myślenia analitycznego u uczniów. Rozwiązywanie zadań w ramach gry wymaga od uczestników nie tylko skupienia i logicznego myślenia, ale również umiejętności analizowania dostępnych informacji, wyciągania wniosków oraz planowania kolejnych kroków. W kontekście zajęć terenowych z podziałem na stanowiska tematyczne, uczniowie muszą interpretować dane, porównywać możliwości, oceniać skutki działań i podejmować trafne decyzje – co w naturalny sposób aktywizuje procesy analityczne. Takie doświadczenia uczą ich elastyczności intelektualnej, krytycznego myślenia oraz samodzielnego rozwiązywania problemów – kompetencji niezbędnych w dalszej edukacji i życiu codziennym.

W przygotowanym przeze mnie scenariuszu interdyscyplinarnych zajęć edukacyjnych zastosowana zostanie analogowa forma grywalizacji, realizowana w terenie. Będzie to gra o określonej fabule, oparta na współpracy uczniów i rozwiązywaniu zadań związanych z różnymi przedmiotami szkolnymi. Uczniowie, przemieszczając się po określonym obszarze, będą wykonywać zadania powiązane z fabularnym kontekstem gry – dzięki czemu nauka stanie się bardziej naturalna, aktywna i angażująca.

Uczniowie wezmą udział w aktywności opartej na fabule, w której przemieszczają się między „stacjami zadaniowymi” – osobnymi stanowiskami tematycznymi, zorganizowanymi w terenie. Każdy stolik reprezentuje inną dziedzinę wiedzy, m.in. przedmioty przyrodnicze, elementy inżynierii oraz sztukę. Uczniowie, rozwiązując zadania na poszczególnych stanowiskach, zdobywają punkty, informacje lub przedmioty potrzebne do dalszego etapu gry, a jednocześnie integrują wiedzę z różnych dziedzin w sposób praktyczny i angażujący. Takie podejście nie tylko pobudza ciekawość i kreatywność, ale również sprzyja rozwojowi kompetencji STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*), które są kluczowe we współczesnej edukacji. Rozdzielenie aktywności na stoliki tematyczne pozwala na pogłębienie poszczególnych zagadnień w mniejszych grupach oraz dostosowanie poziomu trudności do potrzeb uczniów. Gra terenowa staje się w ten sposób przestrzenią doświadczalną, w której nauka zachodzi w sposób aktywny i zintegrowany z działaniem.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie potencjału zastosowania grywalizacji w interdyscyplinarnym nauczaniu matematyki oraz wskazanie praktycznych możliwości jej wdrożenia w procesie dydaktycznym.

Przykładem prostej interdyscyplinarnej gry terenowej STEAM z elementami grywalizacji dla uczniów klas 7–8 jest opracowany przeze mnie według mojego pomysłu fabuły gry scenariusz pt.: „SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI”.

Zajęcia realizowane są metodą stacji zadaniowych, na których uczestnicy mają do wykonania zadania w formacie STEAM. Obszary STEAM objęte scenariuszem to:

- S** – *Science* (nauki przyrodnicze – biologia, fizyka)
- T** – *Technology* (kodowanie, aplikacje mobilne)
- E** – *Engineering* (konstrukcje, logiczne myślenie)
- A** – *Arts* (projektowanie, kreatywność)
- M** – *Math* (obliczenia, szacowanie, geometria)

## 1. Cele edukacyjne:

- Wspieranie myślenia interdyscyplinarnego i łączenia nauki z praktyką.
- Rozwijanie kompetencji przyszłości: współpraca, rozwiązywanie problemów, kreatywność.
- Kształtowanie postawy ekologicznej i odpowiedzialności za planetę.
- Zastosowanie wiedzy z różnych dziedzin w praktyce.

## 2. Czas: 3 godziny lekcyjne

## 3. Uczestnicy: Uczniowie klas 7–8, podzieleni na zespoły 4- lub 5-osobowe

## 4. Miejsce: Teren zielony szkoły, boisko, park, las miejski.

## 5. Mechanika gry:

- Każdy zespół to jednostka badawcza OPZ (Obserwatorium Przestrzeni Ziemskiej)
- Na starcie zespoły otrzymują:
  - ✓ Kartę misji (Załącznik 1.)
  - ✓ Mapę terenową z zaznaczonymi lokalizacjami (Załącznik 3. Mapa terenu + instrukcja, jak ją przygotować)
  - ✓ Raport Operacyjny: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI (Załącznik 4.)
- Zadaniem każdego OPZ jest odnalezienie pięciu Stacji SYGNAŁU i wykonanie zadań STEAM.
- Po ukończeniu zadań zespół składa KOD ODNOWY z fragmentów zdobytych na każdej stacji.

## 6. Wymagania organizacyjne:

- Przygotowane materiały na stacjach (karty zadań, akcesoria, odznaki/certyfikaty).
- Należy poinformować uczniów o czasie trwania zajęć oraz przypomnieć zasady bezpiecznego poruszania się po terenie szkoły, np.:

### *Pamiętajcie:*

- *To nie wyścig – liczy się współpraca, nie tempo.*
- *Nie biegajcie, nie przepychajcie się przy stacjach.*
- *Szanujcie przestrzeń innych grup.*
- *Dbajcie o teren zielony – nie niszczone roślin, nie zostawiajcie śmieci.*
- *W razie problemów – zgłaszajcie się do nauczyciela (baza).*
- Ważne jest upewnienie się, że teren jest bezpieczny i znany uczniom. Trzeba sprawdzić, czy na terenie szkoły nie będzie przeszkód – remontu, zajęć sportowych.
- Nauczyciel musi być dostępny dla uczniów np. w bazie głównej jako wsparcie dla uczniów w razie trudności.
- W razie potrzeby – można wyznaczyć „asystentów misji” wśród uczniów do pomocy logistycznej.
- Trzeba zapewnić liczbę opiekunów/nauczycieli gwarantującą bezpieczeństwo uczniów – najlepiej jeden nauczyciel na każdej stacji.
- W przypadku użycia aplikacji na sprzęcie uczniów musimy zadbać o zgodę rodziców i zabezpieczenie RODO.
- Zajęcia wymagają modyfikacji planu lekcji. Można je poprowadzić podczas np. tygodnia projektów szkolnych.

## 7. Fabuła gry:

### FABUŁA GRY

*Jest rok 2475. Ziemia jest wyniszczona przez katastrofy klimatyczne, nadmiar technologii i zanik natury. W ostatnich dniach przed upadkiem ludzkość odbiera tajemniczy sygnał pochodzący z przeszłości – z roku 2025. To zakodowana wiadomość zawierająca wiedzę potrzebną do odbudowy planety.*

*Wasz zespół to oddział naukowy OPZ – Obserwatorium Przestrzeni Ziemskiej, wysłany z przyszłości w ramach misji SYGNAŁ. Musicie zlokalizować ukryte stacje badawcze, rozwiązać zadania interdyscyplinarne (STEAM) i odzyskać kluczowe dane potrzebne do aktywacji KODU ODNOWY.*

Funkcja Kodu Odnowy:

- To fragmenty informacji zdobywane na każdej stacji.
- Gdy uczniowie zaliczą wszystkie pięć stacji STEAM, składają zdobyte fragmenty (litery, cyfry, symbole, słowa).
- Razem tworzą one hasło-klucz lub kombinację, która:
  - odblokowuje Skrzynię Czasu,
  - kończy grę fabularnie,
  - pozwala przyznać dyplomy i nagrody.

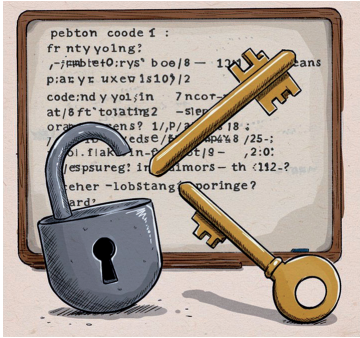
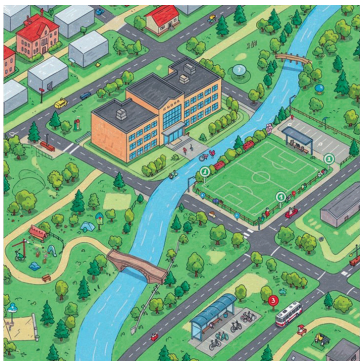
## 8. Przebieg gry:

- Nauczyciel dzieli uczniów na zespoły 4- lub 5-osobowe.
- Uczniowie otrzymują Kartę Misji (Załącznik 1.) i rozpoczynają realizację zadań.
- Uczniowie mają do pokonania pięć stacji z zadaniami z różnych dziedzin.
- Stacja 1 znajduje się w sali lekcyjnej – to punkt startowy. Uczniowie odnajdują przypisaną do ich zespołu kartkę z kodem QR. Kody QR możesz rozwiesić w wyznaczonych punktach w sali lekcyjnej lub rozdać zespołom na kartkach. Po rozwiązaniu zadania uczniowie otrzymują wydrukowaną mapę i ruszają w teren.

Uwaga: Na kartkach dla wszystkich zespołów jest ten sam kod QR, przekierowujący na teren Misji, czyli teren zielony szkoły (boisko i teren zielony).

- Stacje 2–5 rozmieszczone są na terenie zielonym szkoły. Uczniowie pracują metodą stacji zadaniowych z dowolnym wyborem kolejności. Przy każdej stacji znajdują się dwa stanowiska z tym samym zadaniem – aby uniknąć tłoku (jest to istotne w sytuacji większej ilości zespołów niż 4). Zadania uczniowie mogą wykonać w dowolnym miejscu – nie muszą stać przy stoliku. Zespoły mogą też zrobić zdjęcie instrukcji pozostawionej na stacji, by spokojnie pracować z dala od stacji na terenie zielonym (bezpiecznym) szkoły.
- Na każdej stacji uczniowie otrzymują fragment KODU ODNOWY. Po zebraniu wszystkich pięciu fragmentów wracają do bazy głównej. Odszyfrowują kod i zapisują go w Raporcie Operacyjnym.
- Zespół zgłasza się do nauczyciela z gotowym kodem. Jeśli kod jest poprawny, uruchamiają procedurę odnowy planety i otwierają SKRZYNIE CZASU – w niej się znajdują nasiona różnych roślin zapakowane w osobnych woreczkach (ich ilość zależy od liczby zespołów). Zespół wybiera jeden woreczek i wysiewa nasiona we wcześniej przygotowanej doniczce lub słoiku.

Krótki opis stacji z wykazem niezbędnych materiałów znajduje się w tabeli poniżej:

| Nr i tytuł stacji                                                                                                                           | Zadania                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Niezbędne materiały                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>STACJA 1:</b><br/><b>Zakodowana wiadomość</b></p>    | <p>Uczniowie mają za zadanie odszyfrować zakodowaną wiadomość, aby ustalić lokalizację kolejnej stacji zadaniowej. Zadanie rozpoczyna się od zeskanowania kodu QR (wygenerowany w aplikacji <a href="https://www.qr-online.pl/">https://www.qr-online.pl/</a>), który przekieruje ich do wiadomości z ukrytymi współrzędnymi geograficznymi. Po ich poprawnym odczytaniu i wpisaniu, uczniowie ustalą miejsce, z którego „pochodzą sygnały” i otrzymają mapę z dalszymi wskazówkami (mapa wygenerowana w aplikacji <a href="http://www.wspolrzedne.pl">www.wspolrzedne.pl</a>).</p> <p>Dodatkowo uczniowie mogą podjąć się zadania bonusowego, polegającego na rozszyfrowaniu wiadomości zapisanej binarnie za pomocą wskazanej aplikacji online. Na końcu odpowiadają na proste pytanie związane z systemem binarnym, co sprawdza ich spostrzegawczość i zrozumienie tematu.</p>         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• kody binarne, QR lub szyfry Cezara do rozszyfrowania</li> <li>• telefony/tablety z czytnikiem QR (lub użycie własnych)</li> </ul>                                                   |
| <p><b>STACJA 2:</b><br/><b>Matematyka w terenie</b></p>  | <p>Uczniowie mają za zadanie narysować mini plan terenu szkoły z zaznaczeniem miejsc, w których odebrano tajemnicze sygnały.</p> <p>Na początku muszą ustalić skalę mapy, mierząc rzeczywiste wymiary wybranego obiektu (np. budynku lub boiska) i porównując je z wymiarami na mapie. Następnie obliczają długość ogrodzenia oraz przybliżoną powierzchnię terenu szkoły. Kolejnym krokiem jest narysowanie planu terenu i zaznaczenie lokalizacji stacji Sygnału.</p> <p>W części bonusowej uczniowie otrzymują dane satelitarne i mają sprawdzić, czy teren szkoły spełnia warunek aktywacji systemu (czy jego powierzchnia przekracza 0,01 km<sup>2</sup>). Na końcu odpowiadają na pytanie sprawdzające znajomość jednostek miary pola.</p> <p>Zadanie rozwija umiejętności praktyczne z zakresu matematyki (skala, pole, obwód), pracy w terenie oraz orientacji przestrzennej.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• taśma miernicza lub sznurek z miarką</li> <li>• plan terenu/mapa do zaznaczenia obszaru</li> <li>• kalkulatory/smartfony</li> <li>• kartki papieru A4 białe lub w kratkę</li> </ul> |

### STACJA 3: Ekodetektyw



Uczniowie mają za zadanie zidentyfikować co najmniej 5 różnych roślin rosnących na wyznaczonym terenie.  
Do rozpoznawania gatunków mogą użyć aplikacji PlantNet lub atlasu roślin. Po odnalezieniu roślin, uczniowie określają ich typ (np. lecznicza, trująca, miododajna, pospolita), zaznaczają ich lokalizację na mapce oraz zapisują przynajmniej jedno zastosowanie każdej z nich.  
W części bonusowej mają za zadanie odnaleźć tzw. „Roślinę Przodków” – odporny gatunek o szczególnych cechach adaptacyjnych (np. pokrzywa, mniszek). Uczniowie opisują, dlaczego ta roślina mogła przetrwać katastrofy klimatyczne i jak może pomóc w odbudowie planety.  
Na końcu odpowiadają na pytanie dotyczące procesu fotosyntezy, wpisując pierwszą literę jego nazwy do Raportu Operacyjnego.

- klucz rozpoznawania roślin  
– aplikacja PlantNet  
lub atlas roślin
- długopisy, lupa  
(opcjonalnie)

### STACJA 4: Laboratorium inżynierów



Uczniowie mają za zadanie zaprojektować i zbudować model anteny lub prostego urządzenia komunikacyjnego z dostępnych materiałów. Ich konstrukcja nie musi być funkcjonalna, ale powinna pokazywać zasadę działania – ważne są: stabilność, pomysłowość i estetyka. Po zbudowaniu prototypu uczniowie nadają mu nazwę i opisują jego działanie.  
W części bonusowej uczniowie rysują schemat działania urządzenia.  
Na koniec odpowiadają na pytanie o dwa najważniejsze gazy dla życia roślin i ludzi, zapisując ich wzory chemiczne ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ) w kolejności alfabetycznej jako fragment KODU ODNOWY.

- patyczki bambusowe/po lodach
- sznurek/nitka/drucik
- folia aluminiowa
- papier kolorowy i zwykły
- klej/taśma klejąca/klej na gorąco (jeśli dostępny)
- nożyczki

### STACJA 5: Sztuka ziemi



Uczniowie mają za zadanie zaprojektować i zbudować model anteny lub prostego urządzenia komunikacyjnego z dostępnych materiałów. Ich konstrukcja nie musi być funkcjonalna, ale powinna pokazywać zasadę działania – ważne są: stabilność, pomysłowość i estetyka. Po zbudowaniu prototypu uczniowie nadają mu nazwę i opisują jego działanie.  
W części bonusowej uczniowie rysują schemat działania urządzenia.  
Na koniec odpowiadają na pytanie o dwa najważniejsze gazy dla życia roślin i ludzi, zapisując ich wzory chemiczne ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ) w kolejności alfabetycznej jako fragment KODU ODNOWY.

- patyczki bambusowe/po lodach
- sznurek/nitka/drucik
- folia aluminiowa
- papier kolorowy i zwykły
- klej/taśma klejąca/klej na gorąco (jeśli dostępny)
- nożyczki

#### Oczekiwane odpowiedzi:

Rozwiązania zadań na poszczególnych stacjach mogą się różnić w zależności od miejsca realizacji gry. Gra dostosowana jest do lokalnych warunków, dlatego przebieg oraz odpowiedzi do zadań mają charakter indywidualny.

**KOD ODNOWY: 01arFC0202∞**

Opis stacji z instrukcją dla uczniów znajduje się w Załączniku 2.

Po wykonaniu zadań uczniowie ustalają KOD ODNOWY i zgłaszają się do nauczyciela.

## 9. KOD ODNOWY

- Uczniowie aktywują kod i otwierają symboliczną SKRZYNIE CZASU, w której znajdują się nasiona różnych roślin.
- W małej doniczce lub słoiku wysiewają nasiona (początek obserwacji kiełkowania i wzrostu roślin [ocena ich rozwoju] może rozpoczynać realizację kolejnego zadania interdyscyplinarnego).
- Zakończenie misji – przedstawienie raportów zespołowych.

Bonus punktowy za prawidłowo wyznaczony KOD ODNOWY: maks. 10 pkt

## 10. Materiały:

Poza niezbędnymi materiałami na stacjach zadaniowych należy pamiętać o materiałach potrzebnych do przeprowadzenia zajęć:

- Karty Misji, Raporty Operacyjne: Raport Operacyjny: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI dla każdego zespołu. Uwaga: Warto mieć pod ręką kilka zapasowych Kart Misji/Raportów, gdyby coś się zgubiło lub zniszczyło.
- Zadania na stacje (po dwie kopie na każdą stację – jeśli jest więcej niż cztery zespoły)
- Kody QR i ewentualnie kody binarne – tyle egzemplarzy, ile jest grup
- Dyplomy i odznaki (opcjonalnie: drobne nagrody)
- Mapki lokalizacji stacji (wydrukowane na podstawie wersji cyfrowej)
- SKRZYNIA CZASU – może to być zamykany karton lub pudełko
- Nasiona różnych roślin zapakowane w osobne woreczki w liczbie równej liczbie zespołów

## 11. Podsumowanie i refleksja:

- Uczniowie dzielą się wrażeniami, omawiają najtrudniejsze i najciekawsze zadania oraz proponują, co można było zrobić lepiej.
- Uczniowie odpowiadają na pytanie: *Dlaczego w SKRZYNIE CZASU znalazły się różne nasiona?*
- Można też przeprowadzić głosowanie na najbardziej kreatywne rozwiązania.

Scenariusz oparty na grywalizacji powinien łączyć treści merytoryczne z emocjonującą formą, która wciąga uczniów do działania. Kluczowe jest, aby forma nie dominowała nad treścią – elementy gry muszą służyć celom nauczania. Interdyscyplinarność daje dodatkową wartość, pokazując uczniom sens nauki w szerszym kontekście i wspierając rozwój kompetencji przyszłości.

Opracowanie scenariusza lekcji z wykorzystaniem metody grywalizacji wymaga przemyślanego zaplanowania procesu dydaktycznego w taki sposób, aby wprowadzenie elementów gry zwiększało motywację uczniów, angażowało ich emocjonalnie i jednocześnie wspierało realizację celów edukacyjnych. W planowaniu należy uwzględnić następujące zagadnienia:

1. Zdefiniować cele edukacyjne – ogólne i szczegółowe. Cele grywalizacji nie zastępują celów dydaktycznych, one mają je wspierać.
2. Wybór tematu i powiązań interdyscyplinarnych.
3. Wybór mechaniki grywalizacji – punkty; poziomy i awanse; odznaki, misje, zadania specjalne; czasowe wyzwania; systemy nagród; rywalizacja czy współpraca w zespołach.
4. Stworzenie fabuły i kontekstu gry np. misji, przygody. Fabuła powinna być dostosowana do wieku i zainteresowań uczniów.
5. Podział na etapy/poziomy trudności.

Zadania powinny: być podzielone na etapy/misje o rosnącym poziomie trudności; uwzględniać róż-

ne typy zadań: indywidualne, grupowe, kreatywne, praktyczne; mieć formę minigry, np.: quizy, zagadki, matematyczny *escape room*.

6. Ocenianie i informacja zwrotna – jak uczniowie będą zdobywać punkty i jak otrzymają informację zwrotną, np.: punkty za poprawność, szybkość, pomysłowość; dodatkowe bonusy za współpracę lub pomoc innym; warto stosować formy oceny kształtującej (np. podsumowanie postępów na końcu lekcji).
7. Narzędzia i materiały – w zależności od formy grywalizacji możesz potrzebować: kart z zadaniami; aplikacji; plansz, rekwizytów, map, tablic rankingowych; formularzy „kart gracza” lub „kart drużyn”.
8. Ewaluacja scenariusza – po przeprowadzeniu zajęć warto: zebrać opinie uczniów (co się podobało, co ich motywowało); przeanalizować osiągnięcie celów dydaktycznych; zastanowić się nad ulepszeniami – grywalizacja to metoda, którą warto rozwijać stopniowo.

Przy opracowywaniu scenariusza zajęć z wykorzystaniem metody grywalizacji pomocnym narzędziem może być Arkusz grywalizacji<sup>3</sup> stworzony przez Fundację Orange. Stanowi on praktyczne wsparcie w planowaniu aktywności edukacyjnych opartych na mechanizmach gier. Arkusz zawiera m.in.:

- przestrzeń do określenia celów lekcji i przewidywanych efektów uczenia się,
- miejsce na opis fabuły, która wprowadzi uczniów w świat gry,
- możliwość zaplanowania mechanizmów motywacyjnych (np. punktów, poziomów, nagród, wyzwań),
- sekcję do opracowania zadań i aktywności, które będą realizowane w ramach grywalizacji,
- elementy pozwalające monitorować postęp graczy i dostosowywać poziom trudności.

Dzięki takiej strukturze arkusz pomaga zachować równowagę między formą a treścią zajęć oraz wspiera nauczyciela w świadomym projektowaniu procesu dydaktycznego. Może być szczególnie użyteczny dla osób, które dopiero zaczynają pracę z metodą grywalizacji i szukają uporządkowanego sposobu jej wdrażania w praktyce szkolnej.

Musimy mieć świadomość, że zastosowanie grywalizacji w edukacji niesie wiele korzyści, ale też wyzwania związane z jej wdrażaniem, takie jak:

- konieczność starannego projektowania mechanizmów gry tak, by wspierały cele edukacyjne,
- ryzyko skupienia się przez uczniów wyłącznie na nagrodach zamiast na treści nauczania,
- ograniczenia czasowe i organizacyjne (szczególnie przy zajęciach terenowych),
- konieczność dostosowania zadań do różnych poziomów umiejętności i zainteresowań uczniów,
- trudność w mierzeniu skuteczności zadań grywalizacyjnych bez spójnego systemu oceny.

## Zakończenie

---

Tworząc ten scenariusz zajęć interdyscyplinarnych, chciałam pokazać, że nauka nie musi ograniczać się do schematycznych lekcji, zeszytów i tablicy. Może być przygodą, opowieścią, wspólnym działaniem i przestrzenią, w której uczniowie czują się ważni, zaangażowani i zmotywowani. Inspiracją do stworzenia tego scenariusza była potrzeba znalezienia formy pracy, która odpowiada na realne wyzwania współczesnej edukacji – zwłaszcza w pracy z uczniami z pokolenia Alfa.

To pokolenie, które dorasta w świecie natychmiastowej informacji, ekranów, gier i interaktywnych bodźców. Aby ich zaciekać i naprawdę do nich dotrzeć, potrzebujemy nowych metod dydaktycz-

<sup>3</sup> [https://fundacja.orange.pl/app/uploads/2021/09/grywalizacja\\_arkusz.pdf](https://fundacja.orange.pl/app/uploads/2021/09/grywalizacja_arkusz.pdf) [dostęp: 19.08.2025]

nych – opartych na ruchu, emocjach, narracji i współpracy. Dlatego zdecydowałam się na formę gry fabularnej, w której uczniowie wcielają się w role, rozwiązują problemy, podejmują decyzje i przemieszczają się między stacjami zadaniowymi. Każda stacja to nowe wyzwanie, inna dziedzina wiedzy i okazja do praktycznego zastosowania umiejętności z zakresu matematyki, biologii, fizyki, inżynierii, technologii i sztuki – zgodnie z podejściem STEAM.

Co równie istotne, gra realizowana jest w terenie – w otoczeniu szkoły, na świeżym powietrzu, z wykorzystaniem przestrzeni, która często bywa niedoceniana jako potencjał edukacyjny. Taka forma pozwala oderwać się od szkolnej rutyny, aktywizuje fizycznie, pobudza zmysły i naturalnie sprzyja współpracy. Uczniowie doświadczają nauki w realnym kontekście, a zmiana otoczenia wyraźnie wpływa na ich koncentrację, motywację i otwartość na nowe doświadczenia. Teren staje się nie tylko tłem dla gry, ale integralną częścią procesu edukacyjnego – inspirującą i angażującą.

Zależało mi, aby zajęcia były nie tylko merytoryczne, ale też pełne radości i dobrej energii. Aby uczniowie poczuli, że nauka może być zabawą, a szkoła miejscem odkrywania i działania, a nie tylko „zaliczania materiału”. W pracy nad scenariuszem postawiłam na różnorodność form, dzięki temu lekcja staje się przestrzenią, gdzie każdy może wnieść coś od siebie – niezależnie od mocnych stron czy stylu uczenia się.

#### **Załączniki:**

- Załącznik 1. Karta Misji – instrukcja dla uczniów.
- Załącznik 2. Opisy pięciu stacji zadaniowych.
- Załącznik 3. Mapa terenu + instrukcja, jak przygotować mapę wybranego terenu.
- Załącznik 4. Raport Operacyjny: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI.
- Załącznik 5. Wykaz potrzebnych materiałów.

# Załącznik 1: KARTA MISJI

## Gra terenowa: SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI

### WPROWADZENIE DO MISJI:

*Jest rok 2475. Planeta Ziemia jest wyniszczona przez katastrofy klimatyczne, zanik bioróżnorodności i błędy przeszłości. W ostatnich dniach ludzkość odebrała tajemniczy sygnał – nadany z roku 2025. To Wasza szansa!*

*Zostaliście wybrani jako Oddział Badaczy Czasu z jednostki OPZ (Obserwatorium Przestrzeni Ziemskiej). Waszym celem jest wyruszyć w teren, odnaleźć zakodowane dane i aktywować Kod Odnowy, który może uratować przyszłość.*

### CELE GRY:

1. Odnaleźć 5 Stacji SYGNAŁU rozmieszczonych w terenie.
2. Wykonać zadania z różnych dziedzin nauki i sztuki (STEAM).
3. Zdobyć fragmenty KODU ODNOWY — po jednym z każdej stacji.
4. Odszyfrować cały Kod i uruchomić procedurę odnowy planety.

### CO DOSTAJECIE NA START?

- Kartę Misji z fabułą oraz mapą lokalizacji po wykonaniu zadania na pierwszej stacji.
- Raport Operacyjny: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI – tutaj wpisujecie odpowiedzi do zadań i fragmenty hasła

### JAK TO DZIAŁA?

- Pracujecie w zespołach liczących 4–5 osób.
- Każdy zespół samodzielnie decyduje, w jakiej kolejności odwiedza stacje.
- Na każdej stacji:
  - otrzymujecie krótkie zadanie,
  - rozwiązujecie je razem,
  - zdobywacie fragment KODU ODNOWY (np. literę, liczbę, symbol).
- Gdy zdobędziecie wszystkie pięć fragmentów — wracacie do bazy głównej i próbujecie odczytać cały kod.

### JAK WYGLĄDA ZAKOŃCZENIE?

1. Gdy zdobędziecie wszystkie fragmenty, wpiszcie je w odpowiednie miejsca na Karcie Kodu.
2. Zgłoście się do BAZY — pokażcie swój kompletny kod.
3. Jeśli wszystko się zgadza — uruchamiacie procedurę odnowy!
4. Otrzymujecie dyplomy Obrońcy Przyszłości i... może coś więcej?

### ZASADY GRY:

- Współpracujecie. Myślenie zespołowe to Wasza SUPERMOC.
- Nie biegajcie między punktami. To nie wyścig – to misja naukowa!
- Zachowujcie się odpowiedzialnie wobec przyrody.
- Dokumentujcie ciekawe momenty — zdjęcia mogą być częścią raportu misji.

**NAGRODY:**

- Odznaki STEAM (za ukończone stacje)
- Dyplomy Obrońcy Przyszłości
- Nagroda dla zespołu, który najlepiej współpracował lub wykazał się kreatywnością

**JAK PRACUJECIE:**

1. Pracujecie w swoich grupach.
2. Na każdej stacji na stoliku znajdziecie opis zadania.
3. Stacja 1 znajduje się w sali lekcyjnej, w różnych miejscach przypięte są kartki z kodem QR oraz podanym numerem zespołu.
4. Po wykonaniu zadania z pierwszej stacji przejdziemy na teren Misji.
5. Na terenie Misji możecie sami zdecydować, w jakiej kolejności odwiedzacie pozostałe stacje — zaczynacie od dowolnej, która jest wolna.
6. Przy każdej stacji znajdują się dwa stoliki z tym samym zadaniem – dzięki temu unikniecie tłoku.
7. Uważnie zapoznajcie się z każdym zadaniem przed rozpoczęciem pracy.
8. Nie musicie wykonywać zadań bezpośrednio przy stoliku z opisem — możecie przenieść się w inne miejsce (np. teren zielony szkoły).
9. Możecie wybrać osobę z grupy, która zrobi zdjęcie polecenia — dzięki temu nie wszyscy muszą być przy stoliku, co ułatwia pracę.
10. Jeśli przy wybranej stacji są już dwie inne grupy, nie przepychajcie się — możecie chwilę poczekać lub wybrać inną stację.
11. Po wykonaniu zadania przechodzicie do kolejnej stacji, aż wykonacie wszystkie.
12. Po zakończeniu sprawdźcie, czy wypełniliście wszystkie pola w Raporcie Operacyjnym:  
Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI.

**PAMIĘTAJCIE O ZASADACH:**

- Każda grupa musi wykonać wszystkie zadania.
- Pracujecie uważnie i współpracujecie w grupie.
- Szanujcie miejsce pracy innych grup i nie przeszkadzajcie.
- W razie pytań lub problemów zwróćcie się do nauczyciela.
- Planujcie pracę tak, aby efektywnie wykorzystać czas.

**CZAS PRACY:**

Na wykonanie wszystkich zadań macie około 135 minut.

***Powodzenia, Agenci Czasu! Przyszłość planety jest w Waszych rękach!***

## STACJA 1. Zakodowana wiadomość

# Dziennik misji SYGNAŁ – wpis 001

*Po latach ciszy, OPZ (Obserwatorium Przestrzeni Ziemskiej) przechwyciło zakłócenia w martwym paśmie komunikacyjnym. Sygnał pochodzi z roku 2025 – czasów, gdy Ziemia jeszcze oddychała. To może być klucz do odbudowy planety. Wasz zespół zostanie przetransportowany do punktu startowego misji. Musicie ustalić to miejsce. Zaczyna się wasza podróż przez czas i przestrzeń.*

*Musicie rozszyfrować współrzędne geograficzne ukryte w wiadomości i zlokalizować źródło sygnału. Każdy fragment danych to cegielka do odbudowy świata. Uważajcie! Czas działa na Waszą niekorzyść, a systemy ochronne z przeszłości mogą nie być przyjazne.*

## Tytuł zadania: Lokalizacja sygnału

**Cel:** Odczytajcie zakodowaną informację i ustalcie lokalizację kolejnej stacji.

**Miejsce:** sala lekcyjna

### Instrukcja:

Otrzymujecie zaszyfowaną wiadomość w postaci kodu QR do zeskanowania.

1. Odszyfrujcie wiadomość. Ustalcie, skąd pochodzą tajemnicze sygnały, wpisując współrzędne geograficzne:  
 $50^{\circ} 53' 21''$  N oraz  $15^{\circ} 44' 0''$  E
2. Po prawidłowym wykonaniu zadania otrzymacie wydrukowaną mapę (rys. 1).

**Bonus:** Rozszyfrujcie dodatkowy kod binarny przy użyciu aplikacji:

<https://cryptii.com/pipes/binary-to-text>

01001000 01100101 01101100 01101100 01101111

Uwaga: kod może zawierać fragment KODU ODNOWY

### Fragment KODU ODNOWY:

Odpowiedzcie na pytanie: *W systemie binarnym używa się tylko dwóch cyfr. Jakie to cyfry?*

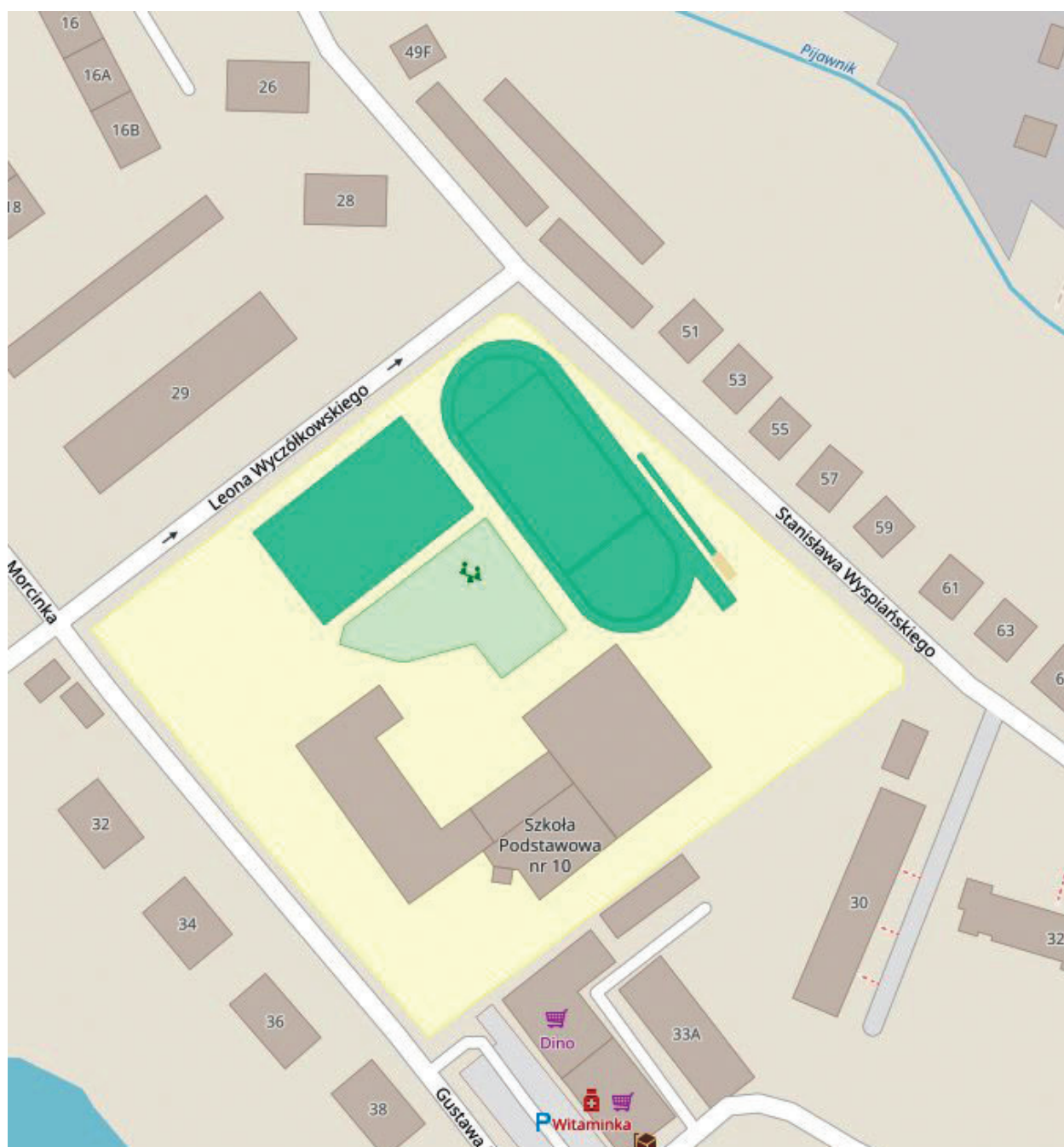
Wpiszcie je do Raportu Operacyjnego w kolejności rosnącej.

**Punkty:** maks. 10 pkt + bonus 5 pkt

**Potrzebne materiały:**

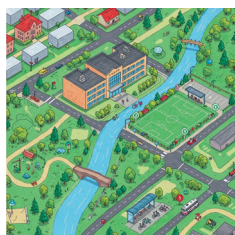
- kody binarne, QR
- telefony/tablety z czytnikiem QR





Rysunek 1. Mapa terenu dla Jednostek OPZ

Uwaga: Widok przedstawia położenie Szkoły Podstawowej nr 10 im. Marii Skłodowskiej-Curie w Jeleniej Górze.



## STACJA 2. Matematyka w terenie

### Dziennik misji SYGNAŁ – wpis 002

*Po zlokalizowaniu pierwszego sygnału Wasz zespół OPZ dotarł do miejsca, które w przeszłości pełniło funkcję centrum nauki i edukacji. Dane z 2025 roku wskazują, że to właśnie tutaj zarejestrowano kilka anomalii przestrzennych – możliwe, że to pozostałości po zakodowanych punktach nadawczych.*

*Aby zidentyfikować dokładne położenie stacji sygnału, musicie stworzyć plan terenu. To nie tylko ćwiczenie z kartografii – to klucz do zrozumienia jak rozmieszczono urządzenia nadawcze w przeszłości. Każdy metr, każdy kąt może mieć znaczenie. Wykorzystajcie dostępne materiały i wykonajcie zadania.*

**Tytuł zadania:** Plan terenu

**Cel:** Narysujcie mini plan terenu, na którym w różnych miejscach odebrano tajemnicze sygnały.

**Instrukcja:**

1. Ustalcie skalę, w której wykonano mapę.  
Podpowiedź: Za pomocą kroków lub taśmy mierniczej zmierzcie granice wybranego obiektu oraz jego wymiary na mapie.
2. Obliczcie długość ogrodzenia szkoły.
3. Obliczcie przybliżoną powierzchnię terenu szkoły.
4. Narysujcie mini plan terenu i zaznaczcie położenie stacji Sygnału.

**Bonus:**

Otrzymujecie dodatkowe dane z satelity OPZ. Wskazują one, że tylko teren o powierzchni większej niż  $0,01 \text{ km}^2$  może aktywować system lokalizacji. Przeliczcie powierzchnię terenu i sprawdźcie, czy spełnia warunek aktywacji.

**Fragment KODU ODNOWY:**

Odpowiedzcie na pytanie: *Jak nazywa się jednostka pola powierzchni równa  $100 \text{ m}^2$ ?*

Wpiszcie nazwę do Raportu Operacyjnego, używając małych liter.

**Punkty:** maks. 10 pkt + bonus 5 pkt

**Potrzebne materiały:**

- taśma miernicza lub sznurek z miarką
- plan terenu/mapa do zaznaczenia obszaru
- kalkulatory/smartfony



## STACJA 3. Ekodetektyw

10

### Dziennik misji SYGNAŁ – wpis 003

*Po dekadach biologicznej ciszy Wasz zespół OPZ natrafia na coś niezwykłego – ślady życia roślinnego. W miejscu, które według archiwów z 2025 roku było terenem szkolnym, natura zaczęła powoli odzyskiwać przestrzeń.*

*Sygnal z przeszłości zawierał zakodowaną informację o roślinach, które mogą odegrać kluczową rolę w odbudowie ekosystemów. Waszym zadaniem jest zidentyfikowanie co najmniej pięciu gatunków roślin, określenie ich właściwości oraz zaznaczenie ich lokalizacji na mapie. Każda roślina może być nośnikiem wiedzy – leczniczej, trującej, zapylającej lub po prostu symbolicznej. Ich obecność może wskazywać, że teren ten był kiedyś oazą bioróżnorodności.*

**Tytuł zadania:** Rozpoznaj i zmapuj życie

**Cel:** Zidentyfikujcie co najmniej 5 różnych roślin znajdujących się w wyznaczonym terenie.

**Instrukcja:**

1. Korzystając z aplikacji np. *PlantNet* lub atlasu roślin, rozpoznajcie 5 roślin.
2. Określcie ich typ (np. roślina miododajna, trująca, lecznicza, pospolita).
3. Oznaczcie ich lokalizację na mapce.
4. Zapiszcie przynajmniej jedno zastosowanie każdej rośliny.

**Bonus:**

Wśród zidentyfikowanych roślin znajduje się jedna oznaczona w archiwach OPZ jako „Roślina Przodków” – gatunek, który według legend przetrwał wszystkie katastrofy klimatyczne.

Odszukajcie tę roślinę (np. pokrzywa, mniszek, babka lancetowata – zależnie od lokalnej flory) i opiszcie, dlaczego mogła przetrwać. Jakie ma cechy adaptacyjne? Jak może pomóc w odbudowie planety?

**Fragment KODU ODNOWY:**

Odpowiedzcie na pytanie i użyjcie pierwszej litery odpowiedzi:

*Jak nazywa się proces, w którym rośliny wykorzystują światło słoneczne do produkcji tlenu i glukozy? Używając wielkich liter, wpiszcie pierwszą literę odpowiedzi do Raportu Operacyjnego.*

**Punkty:** maks. 10 pkt + bonus 5 pkt

**Potrzebne materiały:**

- klucz rozpoznawania roślin – np. aplikacja *PlantNet*
- długopisy, lupa (opcjonalnie)



## STACJA 4. Laboratorium inżynierów

### Dziennik misji SYGNAŁ – wpis 004

*Sygnal z przeszłości został częściowo przechwycony, ale jego struktura jest niestabilna. Aby kontynuować misję, Wasz zespół musi zbudować urządzenie, które umożliwi odbiór i nadawanie danych w warunkach terenowych.*

*W czasach przed upadkiem ludzkości, inżynierowie często tworzyli prototypy z dostępnych materiałów – to była sztuka przetrwania i kreatywności. Teraz Wy musicie zrobić to samo.*

*Zbudujcie model anteny lub urządzenia komunikacyjnego, które – choć symboliczne – pokaże zasadę działania. Nazwijcie je, opiszcie jego funkcję i narysujcie schemat. To może być klucz do ponownego połączenia się z przeszłością... i przyszłością.*

**Tytuł zadania:** Urządzenie do komunikacji

**Cel:** Zaprojektujcie i zbudujcie stabilny, estetyczny i pomysłowy model anteny lub prostego urządzenia komunikacyjnego z dostępnych materiałów.

**Instrukcja:**

1. Zbudujcie prototyp modelu anteny lub prostego urządzenia komunikacyjnego z dostępnych materiałów. Całość nie musi działać, ale musi pokazywać zasadę działania.
2. Nadajcie mu nazwę i opiszcie, jak działa.

**Bonus:** Narysujcie schemat działania.

**Fragment KODU ODNOWY:**

Odpowiedzcie na pytanie i zapiszcie ją za pomocą wzorów chemicznych: *Jakie dwa gazy są najważniejsze dla życia roślin i ludzi na Ziemi?*

Wpiszcie wzory chemiczne do Raportu Operacyjnego w kolejności alfabetycznej.

**Punkty:** maks. 15 pkt (stabilność, pomysłowość, estetyka) + bonus 5 pkt

**Potrzebne materiały:**

- patyczki po lodach/bambusowe
- sznurek/nitka/drucik
- folia aluminiowa
- papier kolorowy i zwykły
- klej/taśma klejąca
- nożyczki



## STACJA 5. Sztuka ziemi

10

### Dziennik misji SYGNAŁ – wpis 005

*Po dekadach technologicznego chaosu ludzkość zaczyna rozumieć, że prawdziwa siła tkwi w prostocie i harmonii z naturą. Wasz zespół OPZ otrzymał zadanie stworzenia symbolu nowej ery – znaku, który będzie świadectwem odrodzenia planety i pamięci o przeszłości.*

*Wykorzystajcie naturalne materiały znalezione w otoczeniu: liście, kamienie, patyki, kwiaty. Stwórzcie ekologiczne dzieło sztuki – „land art”, który przekaże emocje, wartości i nadzieję przyszłym pokoleniom.*

*Wasz artefakt powinien być symetryczny – to nawiązanie do równowagi, której Ziemia tak bardzo potrzebuje.*

**Tytuł zadania:** Stwórz znak nowej ery

**Cel:** Stwórzcie symboliczny artefakt z naturalnych materiałów.

**Instrukcja:**

1. Zbierzcie materiały z otoczenia (np.: liście, kamienie, patyki, kwiaty).
2. Wykonajcie ekologiczny „land art” z naturalnych materiałów – symboliczny znak dla przyszłych pokoleń. Uwzględnijcie układ symetryczny.
3. Nadajcie mu nazwę i opiszcie jego znaczenie.

**Bonus:**

Zróbcie zdjęcie waszego land artu i prześlijcie je do nauczyciela.

**Fragment KODU ODNOWY:**

Odpowiedzcie na pytanie: *Jaki symbol w sztuce często oznacza nieskończoność i odrodzenie?*

**Punkty:** maks. 10 pkt (estetyka, symbolika, współpraca) + bonus 5 pkt

**Potrzebne materiały:**

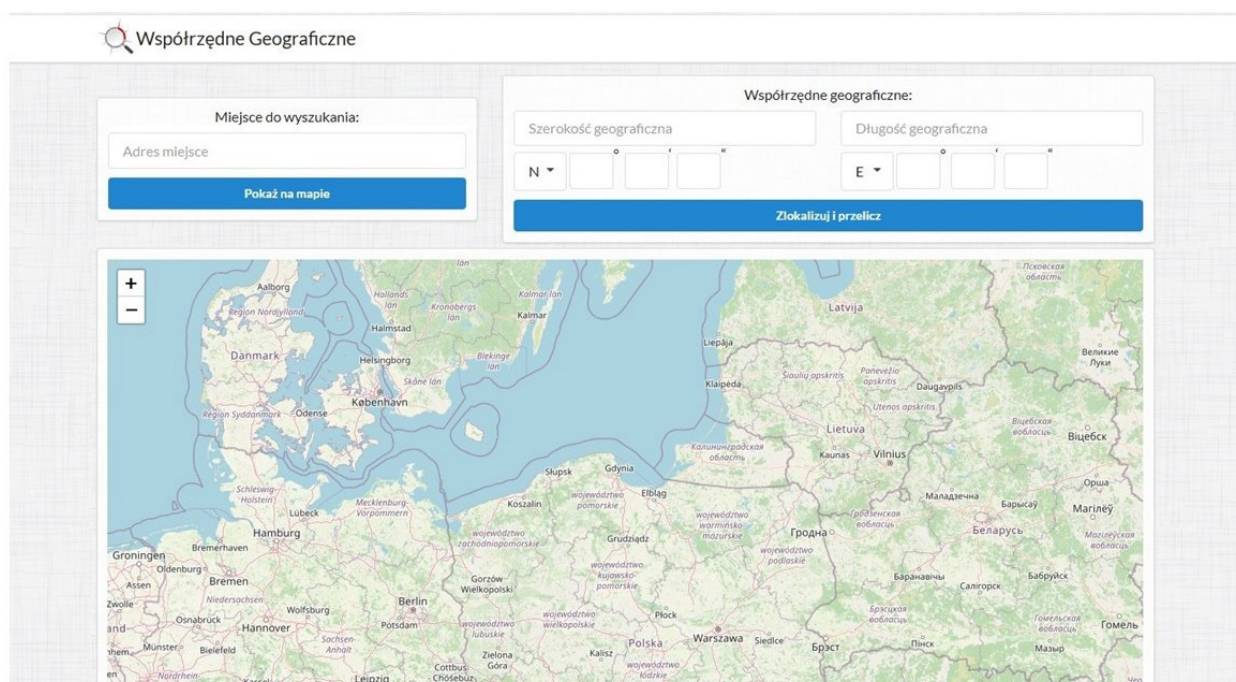
- naturalne materiały (liście, kwiaty, szyszki, gałązki i in.)
- miejsce do prezentacji artefaktów
- aparat fotograficzny/smartfon

## Załącznik 3: Mapa terenu

Grafika poniżej przedstawia okno strony **Współrzędne Geograficzne**: <https://www.wspolrzedne.pl/> oraz fragment mapy opisany za pomocą współrzędnych geograficznych.

Realizacja scenariusza wymaga, aby mapa obejmowała teren, na którym uczniowie będą wykonywać zadania.

W aplikacji można wyszukać wskazany obszar lub obiekt – wtedy współrzędne geograficzne zostaną wyświetlone.



### Instrukcja korzystania ze strony Współrzędne Geograficzne

#### 1. Wejście na stronę

Otwórzcie przeglądarkę internetową i wpiszcie adres: <https://www.wspolrzedne.pl/>

#### 2. Wyszukiwanie miejsca

##### Metoda 1: Wyszukiwarka

- W górnej części strony znajdziecie pasek wyszukiwania.
- Wpiszcie nazwę miejscowości, ulicy, kod pocztowy, nazwę obiektu lub pełny adres.
- Kliknijcie Enter lub ikonę lupki.
- Mapa automatycznie przesunie się do danego miejsca i pokaże jego współrzędne.

##### Metoda 2: Kliknięcie na mapie

- Możecie też kliknąć dowolne miejsce na mapie.
- Po kliknięciu pojawi się:
  - czerwona pinezka,
  - dokładne współrzędne (szerokość i długość geograficzna) poniżej mapy.

### 3. Odczytywanie współrzędnych

Po znalezieniu miejsca (wyszukiwarką lub kliknięciem), zobaczycie:

- szerokość geograficzną – np. 52.2297,
- długość geograficzną – np. 21.0122.

Są one wyświetlane w formacie dziesiętnym (np. 52.2297) oraz stopniowym (np. 52°13'47"N 21°0'44"E).

### 4. Kopiowanie współrzędnych

- Kliknijcie przycisk „Kopiuj”, aby skopiować współrzędne do schowka.
- Możecie je teraz wkleić do wiadomości, dokumentu lub aplikacji GPS.

### 5. Znajdowanie miejsca po współrzędnych

- W polu wyszukiwania możecie też wpisać współrzędne geograficzne (np. 52.406374, 16.9251681).
- Mapa automatycznie pokaże wskazane miejsce.

### 6. Dodatkowe funkcje

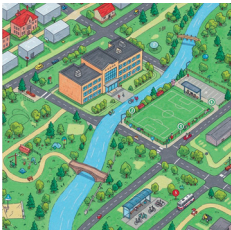
- Link do lokalizacji – pod mapą znajdziecie gotowy link, który możecie wysłać komuś, by pokazać dane miejsce.
- Formatowanie współrzędnych – możecie wybrać, w jakim formacie mają być wyświetlane współrzędne.
- Widok mapy – możecie przełączać się między mapą standardową a satelitarną (ikona w prawym górnym rogu mapy).

## Załącznik 4: Raport Operacyjny: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI

Jednostka OPZ nr \_\_\_\_\_

Członkowie zespołu:

- |          |          |
|----------|----------|
| 1. _____ | 4. _____ |
| 2. _____ | 5. _____ |
| 3. _____ |          |

| Numer stacji                                                                                           | Odpowiedzi<br>do Zadań Operacyjnych | Fragment<br>KODU ODNOWY | Liczba punktów |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|----------------|
| <b>Stacja 1</b><br>   | Odpowiedź – Zadanie                 |                         | Zadanie        |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |
|                                                                                                        | Odpowiedź – Bonus                   |                         | Bonus          |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |
| <b>Stacja 2</b><br> | Odpowiedź – Zadanie                 |                         | Zadanie        |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |
|                                                                                                        | Odpowiedź – Bonus                   |                         | Bonus          |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |
| <b>Stacja 3</b><br> | Odpowiedź – Zadanie                 |                         | Zadanie        |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |
|                                                                                                        | Odpowiedź – Bonus                   |                         | Bonus          |
|                                                                                                        |                                     |                         |                |

|                                                                                                                  |                                                                                                                      |                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <div>Stacja 4</div> <div></div> | <div>Odpowiedź – Zadanie</div> <div>Prototyp - model</div> <div>Odpowiedź – Bonus</div> <div>Schemat działania</div> | <div>Zadanie</div> <div></div> <div>Bonus</div> <div></div> |
| <div>Stacja 5</div> <div></div> | <div>Odpowiedź – Zadanie</div> <div>Land art</div> <div>Odpowiedź – Bonus</div> <div>Zdjęcie</div>                   | <div>Zadanie</div> <div></div> <div>Bonus</div> <div></div> |
| Podsumowanie Misji SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI                                                                          |                                                                                                                      |                                                             |
| KOD ODNOWY                                                                                                       |                                                                                                                      |                                                             |
| Suma punktów                                                                                                     |                                                                                                                      |                                                             |

## Załącznik 5: Wykaz potrzebnych materiałów

---

- Karty Misji, Raporty Operacyjne: Misja SYGNAŁ Z PRZYSZŁOŚCI dla każdego zespołu.  
Uwaga: Warto mieć pod ręką kilka zapasowych Kart Misji/Raportów, gdyby coś się zgubiło lub zniszczyło.
- zadania na stacje (po dwie kopie na każdą stację, jeśli jest więcej niż cztery zespoły)
- kody QR i ewentualnie kody binarne – tyle egzemplarzy, ile jest grup
- dyplomy i odznaki (opcjonalnie: drobne nagrody) dla każdego ucznia
- mapki lokalizacji stacji (wydrukowane na podstawie wersji cyfrowej)
- SKRZYNIA CZASU – może to być zamykany karton lub pudełko
- nasiona różnych roślin zapakowane w osobne woreczki w ilości równej liczbie zespołów
- kody binarne, QR lub szyfry Cezara do rozszyfrowania
- telefony/tablety z czytnikiem QR (lub użycie własnych)
- taśma miernicza lub sznurek z miarką
- plan terenu/mapa do zaznaczenia obszaru
- kalkulatory/smartfony
- klucz rozpoznawania roślin – aplikacja PlantNet lub atlas roślin
- długopisy, lupa (opcjonalnie)
- kartki papieru A4 białe lub w kratkę
- patyczki po lodach/bambusowe
- sznurek/nitka/drucik
- folia aluminiowa
- papier kolorowy i zwykły
- klej/taśma klejąca/klej na gorąco (jeśli dostępny)
- nożyczki
- naturalne materiały zebrane przez uczniów
- miejsce do prezentacji artefaktów (np. stolik, trawa)
- aparat fotograficzny/smartfon

- Centralna Komisja Egzaminacyjna (2020), *Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Termin dodatkowy 2020 r.*, Warszawa.
- Centralna Komisja Egzaminacyjna (2024), *Egzamin ósmoklasisty. Matematyka. Test diagnostyczny*, Warszawa.
- Centralna Komisja Egzaminacyjna (2024), *Egzamin ósmoklasisty. Matematyka*, Warszawa.
- Centralna Komisja Egzaminacyjna (2025), *Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2024/2025*, Warszawa.
- Grochowalska M., Radziejewicz J. (2024), *Matematyka. Przygotowanie do egzaminu ósmoklasisty. Repetytorium*, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.
- Instytut Badań Edukacyjnych (2024), *Profil absolwenta i absolwentki. Droga do zmian w edukacji. Etap I: przedszkola i szkoły podstawowe*, Warszawa.
- Janowicz J. (2021), *Teraz egzamin ósmoklasisty. Repetytorium z matematyki dla szkoły podstawowej*, Warszawa: Nowa Era.
- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz. U. z 2024 r. poz. 996).

### Pozycje zwarte

- Bruner, J. S. (1965), *Proces kształcenia*, Warszawa: PWN.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. (2014), *Feynmana wykłady z fizyki, t. 1.1*, Warszawa: PWN.
- Gardner, M. (1998), *Moje najlepsze zagadki matematyczne i logiczne*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza Quadrivium.
- Hessen, S. (1935), *Podstawy pedagogiki*, Warszawa-Lwów: Nasza Księgarnia.
- Królikowski, J., Steckiewicz, C. (1965), *Matematyka. Wzory – definicje – tablice*, Warszawa: Wydawnictwo Komunikacji i Łączności.
- Michalewicz, Z., Michalewicz, M. (2010), *Nauczanie łamigłówek. Wstęp do krytycznego myślenia, matematyki i rozwiązywania problemów*, Warszawa: PJWSK.
- Perelman, J. (1954), *Zajmująca fizyka*, Warszawa: Wiedza Powszechna.
- Piegat, E. (2000), *Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa*, Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS S.C.
- Piekara, A. H. (1984), *Ciekawe historie o powietrzu*, Warszawa: Nasza Księgarnia.
- Słodowy, A. (1974), *Lubię majsterkować*, Warszawa: WNT.
- Sokołow, E. T. (1987), *Centaur, czyli jak matematyka pomaga fizyce*, Warszawa: PWN.
- Steinhaus, H. (1954), *Kalejdoskop matematyczny*, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

- Winkler, P. (2004), *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection*, New York: A K Petters, Ltd.
- Wróbel, A., Błędowska, M. (red.), *Wokół idei pedagogicznych Sergiusza Hessena*, Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

#### Artykuły w czasopismach

- Bednarek, S. (2008), Od zwierciadła płaskiego do kalejdoskopu, „Delta”, nr 1/2008, s. 18-19.
- Gaj, J. (1974), Laboratorium w domu. Budujemy Perpetuum Mobile albo: I Ty możesz zostać ornitologiem, „Delta”, nr 3/1974, s. 8-9.
- Kordos, M. (2011), Inne spojrzenie, czyli odpowiedź na pytanie, dlaczego Martin Garden był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był, „Delta”, nr 1(440), s. 2-5.
- Matysik, J. (1967), Nauka o gazach w klasie szóstej (Metodyczne opracowanie zagadnienia), „Fizyka w szkole”, nr 2(67), s. 13-20.
- Pogoda, Z. (2011), Kula i dziura, „Delta”, nr 1(440), s. 9.
- Rochalska, M. (2003), Wpływ pola magnetycznego na nasiona i rośliny, „Postępy Nauk Rolniczych”, nr 1/2003, s. 31-46.
- Sawicki, M. (1972), Związki fizyki z innymi przedmiotami nauczania, „Fizyka w szkole”, nr 3(98), s. 32-38.
- Sypek, T. (1980), Zastosowanie przekształceń płaszczyzny do odwzorowań optycznych, „Fizyka w szkole”, nr 4(147), s. 215-217.
- Sypek, T. (1983), Zastosowanie izometrii płaszczyzny do zjawisk odbicia światła, „Fizyka w szkole”, nr 2(163), s. 112-113.
- Zalewski, P. (1996), Nurek Kłapouchego (Apokryf), „Delta”, nr 12(271), s. 12-13.

#### Akty prawne

- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz. U. z 2024 r. poz. 996).
- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz. U. z 2024 r. poz. 1019).

### O pojęciu odległości - od klasyki do abstrakcji (Wiesław Gierczyk)

3

- Gucewicz-Sawicka, I. (1975), *Elementy topologii w nauczaniu na poziomie średnim*, Warszawa: WSiP.
- Krygowska, Z. (1968), *O pojęciu odległości w obowiązujących podręcznikach dla liceum i technikum*, „Matematyka 4”, s. 145-157.
- Marczewski, E., Steinhaus, H. (1959), *O odległości systematycznej biotopów*, „Zastosowania matematyki 4”, s. 195-203.
- Szymański, K., Zegadło, E. (1979), *Matematyka dla klasy 5*, Warszawa: WSiP.

### „Przychodzi budzik do zegara” - scenariusz lekcji (Maria Subik)

4

- Fijałkowska, A. i in. (red.): Zdrowie i styl życia polskich uczniów. Raport z badań. Instytut Matki i Dziecka, Warszawa, 2019. <https://ore.edu.pl/2021/03/raport-zdrowie-i-styl-zycia-polskich-uczniow/> [dostęp: 10.09.2025]
- Nauka w Polsce (2025), „Nastolatki coraz krócej śpią”, <https://scienceinpoland.pl/aktualnosci/news%2C403941%2Cnastolatki-coraz-krocej-spia.html> [dostęp: 10.09.2025]
- Oddział Higieny Żywności i Żywienia Wojewódzkiej Stacji Sanitarno-Epidemiologicznej w Rzeszowie, „Napoje energetyzujące”, <https://www.gov.pl/attachment/75649cff-3620-466a-af3a-3ad2e-8bd16bf>. [dostęp: 10.09.2025]
- pacjent.gov.pl, „Cukier w produktach spożywczych” Cukier w produktach spożywczych | Pacjent, [dostęp: 10.09.2025]
- Planuję Długie Życie (2023): „O dziewięć łyżeczek za daleko. Czy wiesz, ile cukru je twoje dziecko?”, <https://planujedlugiezycie.pl/aktualnosci/o-dziewiec-lyzeczek-za-daleko-czy-wiesz-ile-cukru-je-twoje-dziecko/> [dostęp: 10.09.2025]
- ProfiBaza, „Wpływ regularnej aktywności fizycznej na zdrowie”, [https://profibaza.pzh.gov.pl/wplyw\\_regularnej\\_aktynosci\\_fizycznej\\_na\\_zdrowie](https://profibaza.pzh.gov.pl/wplyw_regularnej_aktynosci_fizycznej_na_zdrowie) [dostęp: 10.09.2025]
- ROZPORZĄDZENIE MINISTRA EDUKACJI z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, (Dz. U. z 2024 r. poz. 996)
- ROZPORZĄDZENIE MINISTRA EDUKACJI z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, (Dz. U. z 2024 r. poz. 996).
- Rzecznik Praw Pacjenta, „Aktywność fizyczna”, <https://www.gov.pl/web/rpp/aktywnosc-fizyczna> [dostęp: 10.09.2025]
- Serwis Rzeczypospolitej Polskiej, „Dzieci w Polsce zjadają 19 łyżeczek cukru dziennie!”, <https://www.gov.pl/web/psse-staszow/dzieci-w-polsce-zjadaja-19-lyzeczek-cukru-dziennie> [dostęp: 10.09.2025]
- Simon Says Smile (2017), „Rethink Your Child’s Sugary Drinks!”, <https://simonsayssmile.ca/simon-pong-dentistry/sugary-drinks/> [dostęp: 10.09.2025]
- Standardy Medyczne (2024), „Nowy raport Biura Regionalnego WHO dla Europy (WHO/Europe) podkreślający społeczno-ekonomiczne różnice w zdrowiu młodzieży”, Nowy raport Biura Regionalnego WHO dla Europy (WHO/Europe) podkreślający społeczno-ekonomiczne różnice w zdrowiu młodzieży - Standardy Medyczne, [dostęp: 10.09.2025]
- WHO (2020), „Healthy diet”, <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/healthy-diet> [dostęp: 10.09.2025]

- Cichy, A., Kęsik, E., Wyszyński, W. (2015), *Scenariusze lekcji z zakresu rynku finansowego z zadaniami matematycznymi i zbiór zadań z odpowiedziami dla uczniów szkół podstawowych i ponadgimnazjalnych*, Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa: Wydawnictwo CEDUR.
- Komisja Nadzoru Finansowego (2015), *Jak dobrze wydać kieszonkowe?*, Warszawa: Wydawnictwo CEDUR.
- Ośrodek Rozwoju Edukacji (2010), *Moje dochody, wydatki, oszczędności. Edukacja ekonomiczna w scenariuszach lekcji. Szkoła podstawowa*, Warszawa.
- Ośrodek Rozwoju Edukacji (2010), *Rozdział II. Rynek – cechy i funkcje. Bloki zajęć jednogodzinne*, Warszawa.
- Zadania z konkursu „Matematyka i Ekonomia” dla uczniów szkół podstawowych.

#### Netografia

- <https://ccprogres.pl/analityczne-myslenie/>
- <https://pl.linkedin.com/pulse/my%C5%9Blenie-analityczne-kompetencja-przysz%C5%82o%C5%9Bci-marek-romanowicz-6vlmf>
- <https://zpe.gov.pl/a/budzet-domowy/DZ2YypJCs>
- <https://zpe.gov.pl/watek/LP16OA5Z5f/3/b/powtorzenie---statystyka-kombinatoryka-prawdopodobienstwo/PkDmoQtpG>

#### Sztuczna inteligencja a zajęcia interdyscyplinarne (Ewa Stelczyk)

## 7

- Smodin (2024), *Best AI Tool for Teachers To Enhance Classroom Learning*, <https://smodin.io/blog/pl/best-ai-tool-for-teachers-to-enhance-classroom-learning/> [dostęp: 11.08.2025]
- <https://developer.microsoft.com/pl-pl/microsoft-edge/> [dostęp 11.08.2025]

#### „Zielona wieża: mini ogród hydroponiczny” – projekt interdyscyplinarny (Magdalena Grzebińska)

## 8

- Cook, K. L., Cox, R., Edelen, D., Bush, S. B., (2025), *Elementary Student Perspectives on STEAM Education*, “Education Sciences”, 15(6). <https://www.mdpi.com/2227-7102/15/6/689> [dostęp 30.09.2025]
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., i in. (2014), *Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematic. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, t. 111(23), s. 8410–8415. <http://www.pnas.org/content/111/23/8410.full.pdf> [dostęp 30.09.2025]
- Trilling, B., & Fadel, C. (2009), *21st century skills: Learning for life in our time*, San Francisco: Jossey-Bass/Wiley. [https://ardian.id/wp-content/uploads/2018/10/21st\\_Century\\_Skills\\_Learning\\_for\\_Life\\_in\\_Our\\_Times\\_\\_\\_2009-3.pdf](https://ardian.id/wp-content/uploads/2018/10/21st_Century_Skills_Learning_for_Life_in_Our_Times___2009-3.pdf) [dostęp 30.09.2025]

#### „Misja na Marsa” – projekt interdyscyplinarny z elementami STEM (Agnieszka Ogiegło)

## 9

- NASA, *Perseverance Rover’s Descent and Touchdown on Mars (Official NASA Video)*, <https://www.youtube.com/watch?v=4czjS9h4Fpg>, [dostęp 30.09.2025]
- Smartgasm, *Opadanie i lądowanie łazika Perseverance. Historyczne nagrania z kamer na pokładzie*. [https://www.youtube.com/watch?v=0db\\_8J9YETk](https://www.youtube.com/watch?v=0db_8J9YETk), [dostęp 30.09.2025]

#### „Sygnał z przyszłości” – scenariusz zajęć interdyscyplinarnych (Małgorzata Bienkowska)

## 10

- Anuradhani, N. S., Yatigammana, K., Wijayarathna, G. (2024), *Defining gamification: a systematic literature review for developing a process-oriented definition*, Journal of Multidisciplinary &

Translational Research (JMTR), t. 9, nr 1, s. 66-85, <https://jmtr.sljol.info/articles/10.4038/jmtr.v9i1.6> [dostęp: 20.08.2025]

- Fundacja Orange, *Arkusz wymyślenia grywalizacji*, [https://fundacja.orange.pl/app/uploads/2021/09/grywalizacja\\_arkusz.pdf](https://fundacja.orange.pl/app/uploads/2021/09/grywalizacja_arkusz.pdf) [dostęp: 19.08.2025]
- <https://www.wspolrzedne.pl/>

Artykuły nr 4, 5 i 10 zawierają grafiki wygenerowane z użyciem narzędzi sztucznej inteligencji.



